

**А. М. ВЛАСОВА**

# МАТЕМАТИКА С MATHCAD

Учебно-методическое пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. М. Власова

# Математика с MathCad

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки  
08.03.01 — Строительство, 02.03.01 — Математика  
и компьютерные науки, 01.03.03 — Механика  
и математическое моделирование

Екатеринбург  
УрФУ  
2017

УДК 51:004.4(075.8)

ББК 22.1я73

В58

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Института физики металлов УрО РАН *А. Г. Кесарев*; завлабораторией физики высоких давлений Института физики металлов УрО РАН канд. физ.-мат. наук *В. П. Пилюгин*

Научный редактор — канд. физ.-мат. наук, доц. С. И. Цыранов

*На обложке используется изображение с сайта <https://goo.gl/kbBy3D>*

**Власова, А. М.**

В58 Математика с MathCad : уч.-метод. пособие / А. М. Власова. — Екатеринбург : УрФУ, 2017. — 139, [1] с.

ISBN 978-5-321-02544-4

Целью данного учебно-методического пособия является формирование у студентов, уже знакомых с системой MathCad, навыков его применения для решения простейших задач вычислительной математики. Описаны средства программирования в пакете MathCad, в приложении рассмотрено построение графиков.

УДК 51:004.4(075.8)

ББК 22.1я73

ISBN 978-5-321-02544-4

© Уральский федеральный  
университет, 2017

© Власова А. М., 2017



---

## Введение

---

Данное пособие кратко, сжато, конспективно, доступным языком с иллюстрациями-наглядными примерами, взятыми из файлов, выполненных в вычислительной системе MathCad, освещает некоторые разделы курса математики, а именно: взятие производных и интегралов, решение уравнений, а также систем линейных и нелинейных уравнений, построение графиков функций и поверхностей второго порядка. Читатель знакомится с принципами численных методов, программированием в системе MathCad, а также с применением стохастических методов в решении некоторых задач. В пособии приводится минимум теоретического материала, при этом расставляются акценты, связанные с сопоставлением традиционных аналитических решений, выкладки которых студент (вслед за преподавателем) обычно осуществляет на бумаге при помощи карандаша, и решений в вычислительной системе MathCad (формулировкой задачи с последующим получением готового ответа).

Автор считает полезным изучение математики с помощью MathCad в качестве «рабочей тетради». При этом рутинные арифметические действия остаются «за кадром», и все внимание устремлено к непосредственному пониманию математики: закономерностей, алгоритмов, логических выкладок.

Даются основы работы в MathCad, рисунки (листинги) иллюстрируют последовательность команд, требуемых для успешной реализации рассматриваемых задач.

Все листинги и рисунки иллюстрируют фрагменты файлов русифицированной программы MathCad 15.0.

Данное учебно-методическое пособие окажет неоценимую помощь студентам инженерных специальностей при подготовке к экзаменам, зачетам и в текущей работе. Студент приобретет навыки, которые помогут ему выполнять различные инженерные расчеты при дальнейшем обучении на старших курсах, а также в инженерной практике. Предполагается, что студент обладает начальными знаниями и навыками работы в вычислительной системе MathCad.

Для подробного и детального изучения вышеупомянутых разделов математики необходимо обращаться к классическим курсам.

---

## 1. Функции и способы их задания. Уравнения поверхностей второго порядка

---

Уже в курсе элементарной математики рассматриваются простейшие элементарные функции одного переменного: взаимосвязь между аналитическим представлением функции и видом графика этой функции. В курсе линейной алгебры и аналитической геометрии вводится понятие поверхности второго порядка. Для успешного освоения курса математики необходимо знать функции и поверхности в пространстве, уметь их строить.

### 1.1. Основные элементарные функции, задаваемые явно

---

К основным классам элементарных функций, рассматриваемых в курсе математического анализа, можно отнести:

- 1) степенные  $y = x^a$  при  $a \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ;
- 2) показательные  $y = a^x$  при  $a > 1, 0 < a < 1$ ;
- 3) логарифмические  $y = \log_a x, y = \ln x$  при  $a > 1, 0 < a < 1$ ;
- 4) тригонометрические  $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ ;
- 5) обратные тригонометрические  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$ .

Для построения графиков функции одной переменной  $y = f(x)$  в MathCad необходимо:

- Поставить крестообразный курсор в файле туда, где нужно построить график;

- Щелкнуть мышью инструмент «График X-Y» на панели инструментов;
- В открывшемся окне появится система координат с двумя местозаполнителями, куда необходимо ввести с клавиатуры по оси абсцисс — аргумент  $x$ , по оси ординат — требуемую функцию  $y(x)$ ;

Щелкнуть мышью пустое поле вне графика. График готов!

Возможен вариант построения графика, когда по оси ординат откладывается общий вид функции, например  $g(x)$ , а в теле файла для этой функции присваивается конкретный вид  $g(x) :=$ .

В MathCad есть следующие встроенные элементарные функции:  $y = \log(x, b)$ ,  $y = \ln(x)$ ,  $y = \sin(x)$ ,  $y = \cos(x)$ ,  $y = \tan(x)$ ,  $y = \cot(x)$ ,  $y = a \sin(x)$ ,  $y = a \cos(x)$ ,  $y = a \tan(x)$ ,  $y = a \cot(x)$ , где  $x$  — переменная,  $b$  — основание логарифма. По умолчанию  $b = 10$ , и  $y = \log(x)$  задает функцию десятичного логарифма.

При построении графиков необходимо помнить, что чтение и выполнение файла происходит сверху вниз и слева направо. Сначала необходимо задать функцию, а потом ссылаться на нее.

Для построения нескольких функций на одном графике необходимо ставить запятую между функциями, после этого курсор будет автоматически перемещаться на строку ниже, в которой необходимо вводить следующий график.

Напомним, что если  $y = f(x)$  и каждому значению  $x$  из области определения  $x \in X$  ставится в соответствие  $y$  из области значений  $y \in Y$ , то *обратной функцией* называется  $x = g(y)$ , в которой каждому значению  $y \in Y$  ставится в соответствие  $x \in X$ . Графически это выявляется тем, что пары взаимно обратных функций симметричны относительно оси симметрии  $y = x$ .

Графики основных элементарных функций и обратных к ним, построенные в MathCad, представлены в прил. 1. Графики основных тригонометрических и обратных к ним функций представлены в прил. 2.

В отдельную группу можно выделить играющие важную роль в анализе и его приложениях **гиперболические функции**, не являющиеся основными элементарными.

Функция гиперболического косинуса описывает линию, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь с закрепленными концами в однородном гравитационном поле. Через гиперболические функции возможно представить, например, уравнение гиперболы в параметрическом виде  $x^2 - y^2 = 1$ , где 
$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t, \end{cases}$$

что можно рассматривать как основное гиперболическое тождество:  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ .

В MathCad существуют встроенные гиперболические функции  $y(x) = \sinh(x)$ ,  $y(x) = \cosh(x)$ ,  $y(x) = \tanh(x)$ ,  $y(x) = \coth(x)$ .

$$\operatorname{sh} x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}, \operatorname{cth} x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}.$$

Гиперболические функции используют в гиперболических заменах при взятии интегралов.

**Обратные гиперболические функции** можно вывести как сложные функции из определения обратной функции.

1. Аресинус  $y(x) = \operatorname{Arsh} x$  — функция обратного гиперболического синуса  $y = \operatorname{sh}(x)$ .

$$\operatorname{sh} x = y = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \exp(x) - \exp(-x) = 2y, \exp(2x) - 2y \exp(x) - 1 = 0,$$

$$\exp(x)_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}, \exp(x) > 0, \exp(x) = y + \sqrt{y^2 + 1}, x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \Rightarrow$$

$$\bullet \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

2. Ареакосинус  $y(x) = \operatorname{Arch} x$  — функция обратного гиперболического косинуса  $y = \operatorname{ch}(x)$ .

$$\operatorname{ch} x = y = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \exp(x) + \exp(-x) = 2y, \exp(2x) - 2y \exp(x) + 1 = 0,$$

$$\exp(x)_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}, \exp(x) > 0, y > 0,$$

$$\exp(x) = y + \sqrt{y^2 - 1}, \exp(x) = y - \sqrt{y^2 - 1}, x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \Rightarrow$$

$$\bullet \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Покажем, что  $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) < 0$ :

$$-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \ln \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Аретангенс  $y(x) = \text{Arth} x$  — функция обратного гиперболического тангенса  $y = \text{th}(x)$ .

$$\text{th } x = y = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}, \exp(x) - \exp(-x) = (\exp(x) + \exp(-x))y,$$

$$\exp(x)(1 - y) = \exp(-x)(1 + y) = 0,$$

$$\exp(2x) = \frac{1 + y}{1 - y}, x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y}{1 - y} \right) \Rightarrow$$

- $\text{Arth } x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + x}{1 - x} \right).$

4. Ареакотангенс  $y(x) = \text{Arcth } x$  функция обратного гиперболического котангенса  $y = \text{cth}(x)$ .

$$\text{cth } x = y = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}, \exp(x) + \exp(-x) = (\exp(x) - \exp(-x))y,$$

$$e^x(y - 1) = \exp(-x)(y + 1) = 0, \exp(2x) = \frac{y + 1}{y - 1}, x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{y + 1}{y - 1} \right) \Rightarrow$$

- $\text{Arcth } x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right).$

В MathCad существуют встроенные обратные гиперболические функции  $y(x) = a \sinh(x)$ ,  $y(x) = a \cosh(x)$ ,  $y(x) = a \tanh(x)$ ,  $y(x) = a \coth(x)$ .

Графики гиперболических функций и обратных к ним представлены в прил. 3.

## **1.2. Функции, задаваемые параметрически**

Алгоритм для построения графиков функций, заданных в параметрическом виде  $y = \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

- Необходимо поставить крестообразный курсор в файле туда, где нужно построить график;

- щелкнуть мышью инструмент «График X-Y» на панели инструментов;
- в открывшемся окне появится система координат с двумя местозаполнителями, куда необходимо ввести с клавиатуры по оси абсцисс —  $\varphi(t)$ , по оси ординат —  $\psi(t)$ ;
- щелкнуть мышью пустое поле вне графика. График готов!

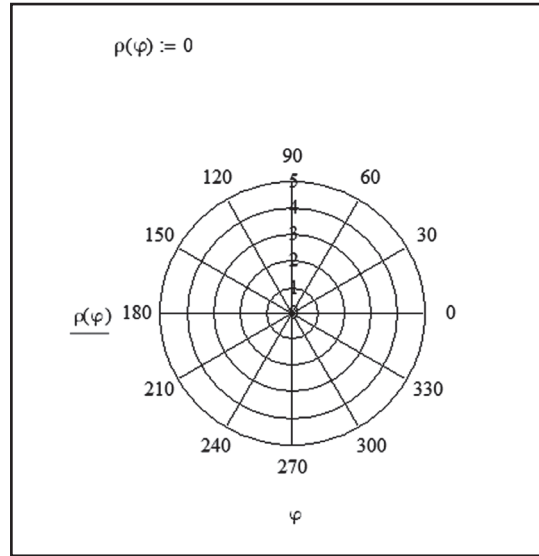
### **1.3. Кривые в полярной системе координат**

Помимо явного и параметрического задания функций одной переменной  $y = f(x)$  возможно задание функций и построение графиков в полярных координатах. Одной и той же точке на плоскости в декартовой системе координат ставится в соответствие пара чисел  $(x, y)$ , в полярной системе координат — пара чисел  $(\rho, \varphi)$ .

Для построения графиков функции, заданных в полярных координатах  $\rho = \rho(\varphi)$ :

- поставить крестообразный курсор в файле туда, где нужно построить график;
- щелкнуть мышью инструмент «Полярный график» на панели инструментов;
- в открывшемся окне появится полярная сетка с четырьмя местозаполнителями, куда необходимо ввести с клавиатуры выражение угла  $\varphi$  для графика и выражение радиуса  $\rho$  для графика, остальные 2 местозаполнителя, отвечающие за верхнюю и нижнюю границу радиальных данных, можно оставить пустыми — они заполнятся автоматически;
- Щелкнуть мышью пустое поле вне графика. График готов!

Если задать функцию  $\rho(\varphi) = 0$ , то можно увидеть полярную сетку, представляющую собой несколько концентрических окружностей, отвечающих за геометрическое место точек равных полярных радиусов  $\rho$  ( $\rho = 1, 2, 3, 4$ ), и прямых, выходящих из центра, отвечающих за геометрическое место точек равных полярных углов  $\varphi$  ( $\varphi = 0, 30, 60, \dots, 360$ ).



Полярная сетка

В полярной системе координат окружность, проходящая через начало координат задается как  $\rho = \text{const}$ . В случае окружности, которая проходит через  $O(0,0)$ , но центр которой смещен, имеем дело со следующими функциями:

$$\rho = a \sin \varphi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad ay = x^2 + y^2, \quad x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Это окружность с центром  $\left(0, \frac{a}{2}\right)$  радиусом  $r = \frac{a}{2}$ .

$$\rho = a \cos \varphi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad ax = x^2 + y^2, \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Это окружность с центром  $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  радиусом  $r = \frac{a}{2}$ .



Таблица 1

## Некоторые уравнения в явном, неявном, параметрическом виде

Уравнение в неявном (явном) виде	Уравнение в параметрическом виде (или в полярной СК)	Название	Примечания
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$	$\begin{cases} x = a + r \cdot \cos t, \\ y = b + r \cdot \sin t \end{cases}$	Окружность	С центром $O(a, b)$ и радиусом $r$
$\frac{(x-a)^2}{r_1^2} + \frac{(y-b)^2}{r_2^2} = 1$	$\begin{cases} x = a + r_1 \cdot \cos t, \\ y = b + r_2 \cdot \sin t \end{cases}$	Эллипс	С центром $O(a, b)$ , большой полуосью $r_1$ и малой полуосью $r_2$
$y = kx + b$ $k = -\frac{d}{c}, b = a + d.$	$\begin{cases} x = a + d \sin^2 t, \\ y = c \cos^2 t \end{cases}$ $\begin{cases} x = t, \\ y = kt + b \end{cases}$	Прямая	—
$x = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$	$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	Циклоида	Периодическая кривая ( $T = 2\pi a$ ), описывающая траекторию фиксированной точки производящей окружности радиуса $a$ , катящейся без скольжения по прямой

Продолжение табл. 1

Уравнение в неявном (явном) виде	Уравнение в параметрическом виде (или в полярной СК)	Название	Примечания
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$	$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$	Астроида	—
$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \ (a > 0)$	$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$	Декартов лист	—
$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$	$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $\rho = 2a(1 - \cos \varphi)$	Кардиоида	Плоская линия, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом

Продолжение табл. 1

Уравнение в неявном (явном) виде	Уравнение в параметрическом виде (или в полярной СК)	Название	Примечания
$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ $y = \pm \sqrt{\sqrt{c^4 + 4x^2c^2} - x^2 - c^2}$	$\begin{cases} x = c\sqrt{2} \frac{p + p^3}{1 + p^4}, \\ y = c\sqrt{2} \frac{p - p^3}{1 + p^4} \end{cases}$ $-\infty < p < \infty$ $p^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$	Лемниската Бернулли	—
—	$\begin{cases} x = ae^{bt} \cos t, \\ y = ae^{bt} \sin t. \end{cases}$ $\rho = ae^{b\varphi}$	Логарифмическая спираль	—
$y^2(2R - x) = x^3$	$\rho = 2R \cdot \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi$ $\begin{cases} x = \frac{2a \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \\ y = \frac{2a \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \end{cases}$	Циссоида	—

Окончание табл. 1

Уравнение в неявном (явном) виде	Уравнение в параметрическом виде (или в полярной СК)	Название	Примечания
$x^2((x+a)^2 + y^2) = a^2 y^2$	$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm a \cdot \operatorname{tg} \varphi$ $\begin{cases} x = a \left( \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} \right) \\ y = a \cdot \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} \right) \end{cases}$	Строфоида	—
$x^2 y^2 + (x+a)^2 (x^2 - b^2) = 0$	$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b$	Конхоида	Полюс в точке $(-a, 0)$
$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$	$\rho = a  \sin 2\varphi $	Четырехлепестковая роза	—

Некоторые из этих кривых в виде графиков можно найти в прил. 4 и 5 к данному пособию.

### 1.4. Прямолинейные и криволинейные координаты. Преобразования

В математическом анализе помимо изучаемых уже в школе прямоугольных декартовых координат (на плоскости и в пространстве) используются цилиндрические и два варианта сферических координат. При рассмотрении точек на плоскости также имеет место полярная система координат. Отдельной подзадачей, без которой невозможно решение более сложных задач, является взаимное преобразование прямолинейных и криволинейных координат одной и той же точки плоскости или трехмерного пространства.

*Декартова прямоугольная система координат* характеризуется тем, что каждой точке  $M$  ставится в соответствие (на плоскости) пара чисел  $(x, y)$  либо (в пространстве) тройка чисел  $(x, y, z)$ , которые являются проекциями данной точки на координатные ортогональные оси координат. Обычно рассматривается правая координатная система, основанная на трех взаимноортогональных базисных векторах, составляющих правую тройку.

*Полярная система координат* ставит в соответствие точке на плоскости пару чисел  $(r, \varphi)$ , называемых соответственно полярный радиус и полярный угол.

Для перевода криволинейных полярных координат в прямолинейные декартовы  $(r, \varphi) \Rightarrow (x, y)$  справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

$$\text{Из прямолинейных в криволинейные } (x, y) \Rightarrow (r, \varphi): \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Полярная система координат представляет параметрическое задание кривой второго порядка — окружности  $x^2 + y^2 = r^2$ , с центром в начале координат, где верхней полуокружности удовлетворяет уравнение  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $y \geq 0$ , нижней —  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $y < 0$ . Если необходимо параметрически задать окружность с центром  $(x_0, y_0)$ , то вид знакомой системы параметрических уравнений незначительно меняется:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \varphi, \\ y = y_0 + r \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad r > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

*Сферическая система координат* представляет собой упорядоченную тройку чисел  $(r, \varphi, \theta)$ , называемых соответственно сферическим радиусом, широтой и долготой. Возможны два типа сферических координат, которые различаются границами изменения широт и долгот.

Для перевода криволинейных сферических координат в прямолинейные декартовы  $(r, \varphi, \theta) \Rightarrow (x, y, z)$  справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Для перевода из прямолинейных в криволинейные сферические  $(x, y, z) \Rightarrow (r, \varphi, \theta)$ :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases}$$

Также для перевода криволинейных сферических координат в прямолинейные декартовы справедлива вторая сферическая система координат  $(r, \gamma, q) \Rightarrow (x, y, z)$ :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta, \\ y = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \\ z = r \cdot \sin \theta. \end{cases}$$

Для перевода из прямолинейных декартовых координат в криволинейные сферические, согласно второй системе координат  $(x, y, z) \Rightarrow (r, \varphi, \theta)$ :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \theta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{cases}$$

Обе сферических системы могут применяться при решении задач; как одна, так и другая рассматриваются в учебниках.

Сферическая система координат является, с другой стороны, параметрическим заданием поверхности второго порядка — сферы с центром в начале координат. Неявно такая сфера задается уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , где одной полусфере удовлетворяет уравнение  $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z \geq 0$ , другой —  $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z < 0$ .

Если необходимо параметрически задать сферу с центром  $(x_0, y_0, z_0)$ , то вид систем параметрических уравнений изменится так

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ y = y_0 + r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \\ z = z_0 + r \cdot \cos \theta. \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta, \\ y = y_0 + r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta, \\ z = z_0 + r \cdot \sin \theta. \end{cases}$$

*Цилиндрическая система координат* представляет собой наложение полярной системы и прямоугольной декартовой, из которой берется третья координата. Для перевода из цилиндрической в прямоугольную:  $(r, \varphi, z) \Rightarrow (x, y, z)$ :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi, \quad r > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\text{Из прямоугольной в цилиндрическую } (x, y, z) \Rightarrow (r, \varphi, z): \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

Цилиндрическая система координат является, с другой стороны, параметрическим заданием поверхности второго порядка — цилиндра  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , конечного для  $z \in [a_0, b_0]$  или бесконечного для  $z \in [-\infty; +\infty]$ .

В MathCad есть встроенные функции, позволяющие переводить координаты точек из одной системы координат в другую:

- *xy2pol* ( $x, y$ ) преобразует прямоугольные координаты точки  $(x, y)$  в полярные координаты  $(r, \theta)$ ;
- *pol2xy* ( $r, \theta$ ) преобразует полярные координаты точки  $(r, \theta)$  в прямоугольные координаты  $(x, y)$ ;

- $xyz2cyl(x, y, z)$  преобразует прямоугольные координаты точки  $(x, y, z)$  в цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$ ;
- $xyz2sph(x, y, z)$  преобразует прямоугольные координаты точки  $(x, y, z)$  в сферические координаты  $(r, \theta, \phi)$ ;
- $cyl2xyz(r, \theta, z)$  преобразует цилиндрические координаты точки  $(r, \theta, z)$  в прямоугольные координаты  $(x, y, z)$ ;
- $sph2xyz(r, \theta, \phi)$  преобразует сферические координаты точки  $(r, \theta, \phi)$  в прямоугольные координаты  $(x, y, z)$ .

$$xy2pol(2, 3) = \begin{pmatrix} 3.606 \\ 0.983 \end{pmatrix} \quad \text{декартовых в полярные}$$

$$pol2xy(1, 2) = \begin{pmatrix} -0.416 \\ 0.909 \end{pmatrix} \quad \text{полярных в декартовы}$$

$$xyz2cyl(1, 2, 5) = \begin{pmatrix} 2.236 \\ 1.107 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{прямоугольных в цилиндрические}$$

$$xyz2sph(1, 2, 5) = \begin{pmatrix} 5.477 \\ 1.107 \\ 0.421 \end{pmatrix} \quad \text{прямоугольных в сферические}$$

$$cyl2xyz(2, 3, 1) = \begin{pmatrix} -1.98 \\ 0.282 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{цилиндрических в декартовы}$$

$$sph2xyz(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} -1.051 \\ 2.295 \\ 1.621 \end{pmatrix} \quad \text{сферических в декартовы}$$

Взаимное преобразование прямолинейных и криволинейных координат с использованием встроенных функций

Преобразование координат необходимо при вычислении объемов и кратных интегралов в криволинейных координатах.



## 1.5. Поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка — это геометрическое место точек трехмерного пространства, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

в котором, по крайней мере, один из коэффициентов  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$  отличен от нуля.

Рассмотрим все типы поверхностей второго порядка в каноническом виде и в параметрической форме (табл. 2). Примеры их построения даются в прил. 6.

Таблица 2

### Поверхности второго порядка в каноническом и параметрическом виде

Название	Канонический вид	Параметрическая форма
Сфера	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$	$\begin{cases} x = x_0 + r \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + r \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 + r \cos \theta \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + r \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + r \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 + r \sin \theta \end{cases}$
Эллипсоид	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + b \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 + c \sin \theta \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + a \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + b \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 + c \cos \theta \end{cases}$
Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz$	—

Продолжение табл. 2

Название	Канонический вид	Параметрическая форма
Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = pz$	—
Гиперболоид однополостный	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{ch} \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + b \operatorname{ch} \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 + c \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$
Гиперболоид двуполостный	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = -1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{sh} \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + b \operatorname{sh} \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 + c \operatorname{ch} \theta \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{sh} \varphi \cdot \cos \theta \\ y = x_0 + b \operatorname{sh} \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z_0 - c \operatorname{ch} \theta \end{cases}$
Конус	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$	—
Цилиндр эллиптический	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \varphi \\ y = y_0 + b \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$
Цилиндр параболический	$y^2 = 2px$	$\begin{cases} x = \frac{u^2}{2} \\ y = u \\ z = z \end{cases}$
Цилиндр гиперболический	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{ch} \varphi \\ y = y_0 + b \operatorname{sh} \varphi \\ z = z \end{cases}$

Окончание табл. 2

Название	Канонический вид	Параметрическая форма
—	—	$\begin{cases} x = x_0 - a \operatorname{ch} \varphi \\ y = y_0 + b \operatorname{sh} \varphi \\ z = z \end{cases}$
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	—
Пара параллельных плоскостей	$y^2 - b^2 = 0$	—
Пара совпадающих плоскостей	$y^2 = 0$	—
Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$	—
Мнимый эллипсоид	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = -1$	—
Мнимый конус	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$	—
Пара мнимых параллельных плоскостей	$y^2 + b^2 = 0$	—
Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	—

Для построения поверхностей второго порядка необходимо:

- *Задать в файле зависимость в явном виде  $z = z(x, y)$ ;*
- *Поставить крестообразный курсор в файле туда, где нужно построить график;*
- *Щелкнуть мышью инструмент «График поверхности» на панели инструментов;*
- *В открывшемся окне появится заготовка графика с одним местозаполнителем, куда необходимо ввести с клавиатуры ссылку на название поверхности  $z = z(x, y)$ ;*
- *Щелкнуть мышью пустое поле вне графика. График готов!*

Если сделать двойной щелчок левой кнопкой мыши по графику, то в появившемся меню *Формат 3D-графика* можно задать дополнительные параметры для него, такие как цвет осей, подсветка, поворот, наклон и других. Удерживая левую кнопку мыши на графике, можно вращать поверхность.

В большинстве случаев зависимость в явном виде выразить невозможно, тогда для построения поверхности необходимо:

- *Задать в файле зависимость в параметрическом виде в качестве массива  $S = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$*
- *Задать параметры функции  $S1 := \text{CreateMesh}(\text{function}(S), [s0, s1, t0, t1], [\text{sgrid}, \text{tgrid}], [\text{fmap}])$ , которая возвращает вложенный массив из трех матриц, представляющих координаты  $x, y$  и  $z$  параметрической поверхности, определенной функцией (функциями) с двумя переменными в первом аргументе (аргументах);*
- *Поставить крестообразный курсор в файле туда, где нужно построить график;*
- *Щелкнуть мышью инструмент График поверхности на панели инструментов;*
- *В открывшемся окне появится заготовка графика с одним местозаполнителем, куда необходимо ввести с клавиатуры ссылку на название поверхности  $S1$ ;*
- *Щелкнуть мышью пустое поле вне графика. График готов!*

---

## 2. Комплексные числа

---

**М**athcad поддерживает работу с комплексными числами в их традиционной форме представления. Однако только в алгебраической. При аналитическом и численном решении уравнений определяются как действительные, так и мнимые корни. Функция комплексного переменного интегрируется. Большинство встроенных функций могут принимать как действительные, так и комплексные аргументы. Многие встроенные функции сами могут возвращать комплексные значения при определенных величинах аргументов.

Встроенными функциями являются

- *arg (z)* возвращает главное значение аргумента комплексного числа  $z$ . Главное значение находится в интервале  $(-\pi, \pi]$ ;
- *csgn (z)* возвращает комплексный знак  $z$ , заданный значением 0, если  $z = 0$ , значением 1, если вещественная или мнимая часть  $z > 0$ , и значением  $-1$  в противном случае;
- *Im (z)* возвращает мнимую часть комплексного числа, вектора или матрицы  $z$ ;
- *Re (z)* возвращает вещественную часть комплексного числа  $z$ ;
- *signum (z, [x])* возвращает  $x$ , если  $z = 0$ , иначе возвращает  $z/|z|$ .

Далее приводятся простейшие действия с комплексными числами: умножение, сложение (вычитание), умножение, деление. Также показано, как при помощи функции **solve** находятся комплексно-сопряженные корни квадратного уравнения  $x^2 + x + 1 = 0$ . Вычисляются действительная, мнимая часть числа, аргумент, сигнум, комплексный знак.

Можно заметить, что автоматически вычисляется только одно значение корня из комплексного числа. Поэтому, для того чтобы вычислить все  $n$  значений корня  $n$ -й степени из комплексного числа, необ-

ходимо задать функцию для его вычисления. Приводится вычисление корня четвертой степени  $a = \sqrt[4]{-1}$ .

$$\begin{array}{ll}
 (2i + 10) \cdot (i - 1) \rightarrow -12 + 8i & 2i - 3i - 10 \rightarrow -10 - i \\
 \sqrt{-1} \rightarrow i & \\
 z := \frac{2 \cdot i + 10}{i - 7} \rightarrow -\frac{34}{25} - \frac{12}{25} \cdot i & x^2 + x + 1 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \end{pmatrix} \\
 \operatorname{Re}(z) \rightarrow -\frac{34}{25} & \operatorname{Im}(z) \rightarrow -\frac{12}{25} \quad \operatorname{csgn}(z) \rightarrow -1 \\
 \arg(z) \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{6}{17}\right) - \pi & \operatorname{signum}(z) \rightarrow \sqrt{52} \cdot \left(-\frac{17}{130} - \frac{3}{65} \cdot i\right)
 \end{array}$$

Основные операции с комплексными числами

Действительные  $\operatorname{Re}(a)$  и мнимые  $\operatorname{Im}(a)$  части вычисленных корней выводятся в качестве массива. Проверкой служит вычисление модулей каждого из 4 полученных чисел  $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(a) + \operatorname{Im}^2(a)}$ . Все они лежат на окружности радиусом  $r = 1$ .

$$\begin{array}{llll}
 n := 4 & z := -1 & k := 0..n-1 & \sqrt[n]{|z|} = 1 \\
 a_k := \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos\left(\frac{\arg(z) + 2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arg(z) + 2\pi k}{n}\right) \right) & & & \\
 a \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) \\ \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) \\ \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i\right) \\ \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i\right) \end{bmatrix} & \operatorname{Re}(a) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} & \operatorname{Im}(a) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} & \\
 & \sqrt{\operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & 
 \end{array}$$

Извлечение корней из комплексных чисел

---

### 3. Предел последовательности и предел функции одной переменной

---

#### 3.1. Числовые последовательности и их пределы

---

Если каждому числу  $n$  натурального ряда чисел  $1, 2, \dots, n, \dots$  ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число  $x_n$ , то множество занумерованных вещественных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  называется числовой последовательностью. Элементы или члены последовательности будем обозначать символом  $\{x_n\}$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое вещественное число  $M$  (число  $m$ ), что каждый элемент  $x_n$  последовательности  $\{x_n\}$  удовлетворяет неравенству  $x_n \leq M$  ( $x_n \geq m$ ).

При этом число  $M$  (число  $m$ ) называется верхней гранью (нижней гранью) последовательности  $\{x_n\}$ , а неравенство  $x_n \leq M$  ( $x_n \geq m$ ) называется условием ограниченности последовательности сверху (снизу).

Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной с обеих сторон или просто ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. если существуют числа  $m$  и  $M$  такие, что любой элемент  $x_n$  этой последовательности удовлетворяет неравенствам  $m \leq x_n \leq M$ .

Если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, а  $M$  и  $m$  — ее верхняя и нижняя грани, то все элементы  $x_n$  этой последовательности удовлетворяют неравенству  $|x_n| \leq A$ , где  $A$  — максимальное из двух чисел  $|M|$  и  $|m|$ . Так, если все элементы последовательности  $\{x_n\}$  удовлетворяют неравенству  $|x_n| \leq A$ , то выполняются также неравенства  $-A \leq x_n \leq A$  и, следовательно, последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

Последовательность  $\{x_n\}$  называется неограниченной, если для любого положительного числа  $A$  найдется элемент  $x_n$  этой последовательности, удовлетворяющий неравенству  $|x_n| > A$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если для любого положительного числа  $A$  можно указать номер  $N$  такой, что при  $n \geq N$  все элементы  $x_n$  этой последовательности удовлетворяют неравенству  $|x_n| > A$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно малой, если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать номер  $N$  такой, что при  $n \geq N$  все элементы  $a_n$  этой последовательности удовлетворяют неравенству  $|a_n| < \varepsilon$ .

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется сходящейся, если существует такое число  $A$ , что последовательность  $\{x_n - A\}$  является бесконечно малой. При этом число  $A$  называется пределом этой последовательности  $\{x_n\}$ .

Рассмотрим последовательность площадей правильных  $n$ -угольников  $\{S_n\}$ , вписанных в окружность радиусом  $R$ . При бесконечном увеличении сторон площадь такого  $n$ -угольника стремится к площади круга! Значит, последовательность  $\{S_n\}$  имеет конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi R^2$ .

Рассмотрим вычисление пределов некоторых числовых последовательностей и прокомментируем их вычисление аналитически:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n}{n^2} \rightarrow 5$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n+3}\right)^{n+10} \rightarrow e^{\frac{1}{5}}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n + 10}{n^2 + 1} \rightarrow \infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)^{5n^2+2} \rightarrow e^5$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)^{5n^2+2} \rightarrow \infty$

Вычисление пределов последовательностей



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n}{n^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{1} = 5.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n + 10}{n^2 + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n^2} + \frac{10}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = \infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = \left[ 1^\infty \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{5n+3} \right)^{(n+10)} = \left[ 1^\infty \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{5n+3} \right)^{(5n+3) \cdot \frac{(n+10)}{(5n+3)}} = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{5n+3} \right) = \exp \left( \frac{1}{5} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{n^2 + n + 3} \right)^{(5n^2 + 2)} = \left[ 2^\infty \right] = \infty.$$

### 3.2. Предел функции

**Определение 1.** Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если  $f(x)$  определена в этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки  $a$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  можно указать зависящее от него  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x$ , для которых  $0 < |x - a| < \delta$  имеет место  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Обозначается  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**Определение 2.** Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если она определена в этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки  $a$  и если предел последовательности  $f\{x_n\}$  существует и равен  $A$ , какая бы ни была последовательность  $\{x_n\}$ , сходящаяся к  $a$ , и такая, что  $x_n \neq a$  для всех  $n$ .  $\lim_{x_n \rightarrow a} f(x_n) = A$ .

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x} \rightarrow 5$	5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^4 - 1} \rightarrow \frac{7}{4}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}\right) \rightarrow 3$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{x^2 + x}} \rightarrow e^3$

### Вычисление пределов функций в точке

Аналитический расчет дает те же результаты:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (5 + 10x + 10x^2 + 5x^3 + x^4) = 5.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = 3.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^7 - 1}{x^4 - 1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \frac{7}{4}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{\frac{3}{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x^2+x} \cdot 3} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} 3\right) = \exp 3.$$

---

## 4. Дифференцирование и интегрирование

---

**В** этой главе излагаются примеры вычисления производных первого порядка и  $n$ -го порядка, исследование функции одного переменного на экстремум, вычисление определенных, неопределенных, несобственных, эллиптических интегралов. Рассматриваются интегралы, не берущиеся в элементарных функциях. Показано, как табулировать функцию одного переменного.

В курсе математического анализа рассматриваются кроме того двойные, тройные, криволинейные интегралы первого и второго родов, поверхностные интегралы первого и второго родов, которые здесь не приводятся.

---

### 4.1. Дифференцирование

---

Определением производной функции является

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

На панели инструментов *Математический анализ* два значка относятся к дифференцированию, это, непосредственно, взятие производной  $\frac{d}{dx}$  и взятие производной  $n$ -го порядка  $\frac{d^n}{dx^n}$ .

Из данного выше определения аналитически можно вывести производные всех основных классов элементарных функций, то есть записать таблицу производных. Сделаем это для всех основных классов элементарных функций.

## 4.1.1. Производные основных элементарных функций

1) Производная степенной функции с целочисленным показателем

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

2) Производная степенной функции с рациональным показателем. Для доказательства необходимо использовать логарифмирование:

$$y = x^\alpha, \ln y = \alpha \ln x, \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}, y' = \frac{\alpha y}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

3) Производная логарифмической функции:

$$\begin{aligned}
 (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{x}}}{\ln a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.
 \end{aligned}$$

4) Производные тригонометрических функций

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{tg} x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} \Delta x}{(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x) \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{ctg} x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \Delta x + 1}{\operatorname{ctg} \Delta x - \operatorname{ctg} x} - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \Delta x + 1 - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \Delta x + \operatorname{ctg}^2 x}{(\operatorname{ctg} \Delta x - \operatorname{ctg} x) \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 x)}{\frac{\cos \Delta x \cdot \Delta x}{\sin \Delta x} - \operatorname{ctg} x \cdot \Delta x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

5) Производная показательной функции  $f(x) = a^x$  будет выглядеть как

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

6) Производные от обратных гиперболических функций. Для того чтобы аналитически вывести производные от арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, необходимо рассмотреть теорему о производной обратной функции.

**Теорема.** Пусть функция  $y = f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  возрастает (или убывает), непрерывна, дифференцируема в точке  $x_0$  и производная  $f'(x_0)$  отлична от нуля. Тогда существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , которая определена в некоторой окрестности соответствующей точки  $y_0 = f(x_0)$ , дифференцируема в этой точке и имеет в этой точке производную, равную  $\frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $x = f^{-1}(y)$ , отношение приращения функции к приращению аргумента равно  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$ . При этом  $\Delta y \neq 0, \Delta x \neq 0$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}. \text{ Но } (f^{-1}(y_0))' = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

$$\begin{aligned}
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\
 (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};
 \end{aligned}$$

$$(\operatorname{arccctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Производная от показательной функции  $(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}} = a^x \cdot \ln a.$

К основным правилам дифференцирования относят дифференцирование произведения, частного, суммы функций одного переменного  $U(x), V(x)$ . При помощи символьного процессора MathCad можно получить эти правила самостоятельно.

Далее приводится таблица производных основных классов дифференцируемых функций, полученная символьным вычислением в MathCad.

#### 4.1.2. Таблица производных

$\frac{d}{dx} C \rightarrow 0$	$\frac{d}{dx} x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$
$\frac{d}{dx} a^x \rightarrow a^x \cdot \ln(a)$	$\frac{d}{dx} e^x \rightarrow e^x$
$\frac{d}{dx} \operatorname{asin}(x) \rightarrow \left(1 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{atan}(x) \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$
$\frac{d}{dx} \ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} \log(x, a) \rightarrow \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{acos}(x) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{acot}(x) \rightarrow -\frac{1}{x^2 + 1}$
$\frac{d}{dx} \sin(a \cdot x) \rightarrow a \cdot \cos(a \cdot x)$	$\frac{d}{dx} \sinh(a \cdot x) \rightarrow a \cdot \cosh(a \cdot x)$
$\frac{d}{dx} \cos(a \cdot x) \rightarrow -a \cdot \sin(a \cdot x)$	$\frac{d}{dx} \cosh(a \cdot x) \rightarrow a \cdot \sinh(a \cdot x)$
$\frac{d}{dx} \tan(a \cdot x) \rightarrow a \cdot (\tan(a \cdot x)^2 + 1)$	$\frac{d}{dx} \tanh(a \cdot x) \rightarrow -a \cdot (\tanh(a \cdot x)^2 - 1)$
$\frac{d}{dx} \cot(a \cdot x) \rightarrow -a \cdot (\cot(a \cdot x)^2 + 1)$	$\frac{d}{dx} \coth(a \cdot x) \rightarrow -a \cdot (\coth(a \cdot x)^2 - 1)$

Вычисление в MathCad производных

Рассмотрим некоторые примеры взятия производных по вышеупомянутым правилам, с использованием таблицы:

1.	$\frac{d}{dx}(x^2 + 5x + \tan(x) + 10) \rightarrow \tan(x)^2 + 2 \cdot x + 6$
2.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x)^2}\right) \rightarrow \frac{2 \cdot \sin(x)}{\cos(x)^3}$
3.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 5 \cdot x}{x + 23}\right) \rightarrow \frac{2 \cdot x + 5}{x + 23} - \frac{x^2 + 5 \cdot x}{(x + 23)^2}$
4.	$\frac{d}{dx}x^x \rightarrow x \cdot x^{x-1} + x^x \cdot \ln(x)$

Дифференцирование некоторых сложных функций

Расчеты вручную дают следующие результаты:

$$1. \quad (x^2 + 5x + \operatorname{tg} x + 10)' = 2x + 5 + \frac{1}{\cos^2 x} = 2x + \operatorname{tg}^2 x + 6.$$

$$2. \quad \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2 \frac{1}{\cos^3 x} (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

3.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + 5x}{x + 23}\right)' &= \frac{(2x + 5) \cdot (x + 23) - (x^2 + 5x)}{(x + 23)^2} = \frac{2x^2 + 46x + 5x + 115 - x^2 - 5x}{(x + 23)^2} = \\ &= 1 - \frac{414}{(x + 23)^2}. \end{aligned}$$

4. Функции типа  $y(x) = f(x)^{g(x)}$  относятся к показательно-степенному типу. Основной принцип, который необходимо использовать при решении, — это логарифмирование. Основное свойство логарифмов  $\log_a^b x = b \cdot \log_a x$  позволяет показатель степени превратить в множитель, и нахождение производной от показательно-степенной функции свести к нахождению производной от произведению двух функций.

$$5. \quad y = x^x, \ln y = x \ln x, \frac{y'}{y} = \ln x + 1, y' = x^x (\ln x + 1).$$

4.1.3. Производная  $n$ -го порядка

В MathCad можно посчитать  $n$ -ю производную от любой  $n$  раз дифференцируемой функции. Рассмотрим, как можно записать одним уравнением производную  $n$ -го порядка от  $y = \sin \alpha x$ ,  $y = \cos \alpha x$ . Возьмем, например, производную 10-го порядка от  $y = \sin 4x$ . Последовательное взятие производной от производной четыре раза дает следующие функции:

$$y = \sin 4x, y' = 4 \cos 4x, y'' = -16 \sin 4x, y''' = -64 \cos 4x, y^{IV} = 256 \sin 4x.$$

Можно заметить: чередование  $y = \sin 4x$  и  $y = \cos 4x$ , чередование знака такое, что два «плюса» сменяются двумя последующими «минусами», абсолютная величина коэффициента перед функцией —  $4^n$ .

Тогда, используя формулы приведения, можно записать:

$$\frac{d^n(\sin \alpha x)}{dx^n} = \alpha^n \cdot \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \alpha &:= 4 \\ n &:= 10 \\ f(x) &:= \sin(\alpha \cdot x) \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) &\rightarrow 81 \cdot \sin(3 \cdot x) \\ \frac{d}{dx} \sin(\alpha \cdot x) &\rightarrow 3 \cdot \cos(3 \cdot x) \\ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \sin(\alpha \cdot x) &\rightarrow -9 \cdot \sin(3 \cdot x) \\ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \sin(\alpha \cdot x) &\rightarrow -27 \cdot \cos(3 \cdot x) \\ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \sin(\alpha \cdot x) &\rightarrow 81 \cdot \sin(3 \cdot x) \\ \text{proizv}_n(x) &:= \alpha^n \cdot \sin\left(\alpha \cdot x + \frac{\pi n}{2}\right) \text{ simplify } \rightarrow 81 \cdot \sin(3 \cdot x) \end{aligned}$$

Вычисление производной 10-го порядка от  $y = \sin 4x$



Аналогичные рассуждения можно проделать относительно производной  $n$ -го порядка от  $y = \cos \alpha x$ .  $\frac{d^n(\cos \alpha x)}{dx^n} = \alpha^n \cdot \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= 3 \\
 n &:= 4 \\
 f(x) &:= \cos(\alpha \cdot x) \\
 \frac{d^n}{dx^n} f(x) &\rightarrow 81 \cdot \sin(3 \cdot x) \\
 \frac{d}{dx} \cos(\alpha \cdot x) &\rightarrow -3 \cdot \sin(3 \cdot x) \\
 \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \cos(\alpha \cdot x) &\rightarrow -9 \cdot \cos(3 \cdot x) \\
 \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \cos(\alpha \cdot x) &\rightarrow 27 \cdot \sin(3 \cdot x) \\
 \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \cos(\alpha \cdot x) &\rightarrow 81 \cdot \cos(3 \cdot x) \\
 \text{proizv\_n}(x) &:= \alpha^n \cdot \cos\left(\alpha \cdot x + \frac{\pi n}{2}\right) \text{ simplify } \rightarrow 81 \cdot \cos(3 \cdot x)
 \end{aligned}$$

Вычисление производной 4-го порядка от  $y = \cos 3x$

#### 4.1.4. Производная $n$ -го порядка от произведения двух функций. Формула Лейбница

Пусть даны две  $n$  раз дифференцируемые функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ , будем последовательно брать производные от произведения  $y = f(x)g(x)$ :

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$y'' = f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x),$$

$$y''' = f'''(x) \cdot g(x) + 3f''(x) \cdot g'(x) + 3f'(x) \cdot g''(x) + f(x) \cdot g'''(x).$$

Легко заметить, что коэффициенты составляют число сочетаний  $C_n^k$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

Тогда можно записать  $\frac{d^n(f(x) \cdot g(x))}{dx^n} = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k f(x)}{dx^k} \cdot \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}},$

и формула для  $n$ -й производной произведения аналогична биному Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^k a^k b^{n-k} + \dots + C_n^n a^n b^0 = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k \cdot b^{n-k}$$

Число сочетаний без повторений  $C_n^k$  вычисляется с использованием встроенной функции *Combin* ( $n, k$ ). Приводится пример вычисления производной 5-го порядка  $y = x^2 \sin 2x$ . Каждый элемент суммы выводится в массиве.

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^n \left( \text{combin}(n, k) \cdot \frac{d^k}{dx^k} f(x) \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x) \right)$$

$n := 5$   
 $f(x) := x^2$   
 $g(x) := \sin(2x)$   
 $k := 0..n$

$$\text{combin}(n, k) \cdot \frac{d^k}{dx^k} f(x) \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 32 \cdot x^2 \cdot \cos(2 \cdot x) \\ 160 \cdot x \cdot \sin(2 \cdot x) \\ -160 \cdot \cos(2 \cdot x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Формула Лейбница для вычисления производной 5-го порядка функции  $y = x^2 \sin 2x$

#### 4.1.5. Исследование функций и построение графиков

Исследование функций заключается в нахождении графических закономерностей поведения кривой графика исходя из аналитического задания функции  $y = f(x)$ . Среди прочего необходимо определить горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты как уравнения прямых. Точки разрыва, поведение функции вблизи точек разрыва, пределы на бесконечности, промежутки возрастания (убывания), выпуклости (вогнутости). Покажем пример исследования функции,

которую не часто встретишь в вузовских учебниках, а именно, нетривиальную функцию  $y^x - x^y = 0$  ( $x > 0, y > 0$ ).

Соответствующее уравнение имеет две пары целочисленных решений  $(2, 4), (4, 2)$ . Очевидно, что уравнению удовлетворяют точки, принадлежащие прямой  $y = x$ . Для отыскания других решений параметризуем

$$\text{уравнение, положив } y = tx. \text{ Тогда } x^{tx} = (tx)^x \text{ и, окончательно, } \begin{cases} x(t) = t^{\frac{1}{t-1}}, \\ y(t) = t^{\frac{t}{t-1}}. \end{cases}$$

Определим предел функции при стремлении параметра  $t$  к нулю  $(0+0)$ , при помощи правила Лопиталя:

$$\begin{aligned} \ln \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{t-1}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \ln t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t-1} = \\ &= +\infty, \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{t-1}} = \exp(+\infty) = +\infty, \ln \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{t}{t-1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \ln t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln t}{t-1} = 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{t}{t-1}} = \exp(0) = 1. \end{aligned}$$

Определим предел функции при бесконечном стремлении параметра  $t$  к бесконечности  $(+\infty)$ :

$$\begin{aligned} \ln \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{t-1}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t-1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{t-1}} = \exp(0) = 1. \\ \ln \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{t}{t-1}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \ln t}{t-1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t - t \frac{1}{t}}{1} = +\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{t}{t-1}} = \exp(+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Значит, у функции две асимптоты  $x(t) = 1, y(t) = 1$ . Для определения интервалов монотонности вычислим первую производную неявной функции  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ , при этом производные  $y'_t, x'_t$  вычисляются как логарифмические.

$$\begin{aligned} (\ln x(t))' &= \left( \frac{\ln t}{t-1} \right)', (\ln y(t))' = \left( \frac{t \ln t}{t-1} \right)', \frac{x'_t}{x} = \frac{\frac{1}{t}(t-1) - \ln t}{(t-1)^2}, \\ \frac{y'_t}{y} &= \frac{(\ln t + 1)(t-1) - t \ln t}{(t-1)^2} = \frac{-\ln t + t - 1}{(t-1)^2}, y'_x = \frac{t^{\frac{t}{t-1}} (-\ln t + t - 1)}{\frac{1}{t^{\frac{1}{t-1}}} (1 - \frac{1}{t} - \ln t)} = \frac{t^2 (\ln t - t + 1)}{t \ln t - t + 1}. \end{aligned}$$

Числитель и знаменатель первой производной отрицателен при любом положительном  $t$ , следовательно, функция убывает на всей области определения. Поскольку  $y^x = x^y$ , то  $t^{\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{t}{t-1}} \Rightarrow t = 1$ . Найдем точку самопересечения  $A(x_0, y_0)$  как предел функций  $x(t), y(t)$  в точке  $t = 1$ .

$$\ln \lim_{x \rightarrow 1} t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} t^{\frac{1}{t-1}} = e,$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 1} t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t \ln t}{t-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln t + 1}{1} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} t^{\frac{t}{t-1}} = e.$$

Приводятся те же вычисления, построен график неявной функции  $y^x - x^y = 0$  ( $x > 0, y > 0$ ).

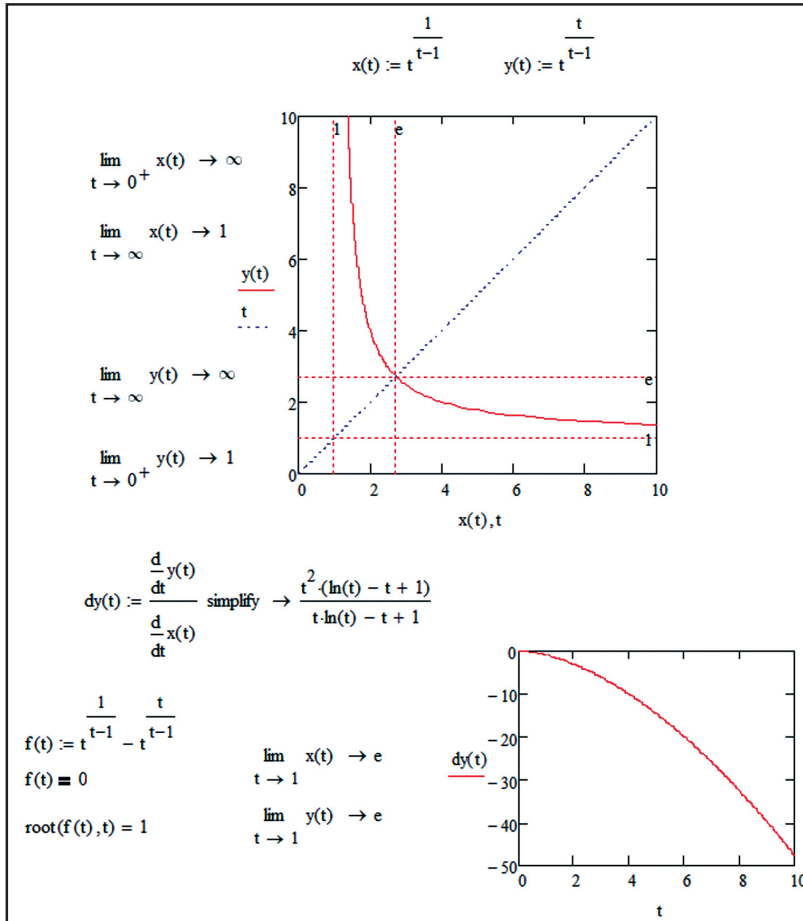


График неявной функции  $y^x - x^y = 0$  ( $x > 0, y > 0$ )

## 4.2. Интегрирование

Интегрирование — это одна из важнейших операций, изучаемых в курсе математического анализа. Читатель познакомится с основами численного интегрирования, а также основными алгоритмами, заложенными в операции интегрирования в вычислительном пакете Mathcad.

### 4.2.1. Нахождение неопределенных интегралов

Найти неопределенный интеграл — значит вычислить функцию по ее производной.  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , где  $F(x)$  — первообразная. Задача нахождения неопределенного интеграла родилась из задачи определения закона движения по известным зависимостям проекций скоростей от времени.

Есть не очень показательные примеры вычисления интегралов в MathCad. В первом случае вычисления не упрощаются, во втором — результаты являются неверными. Например:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{\operatorname{atanh}\left(\frac{\cos(x) + \sin(x) + 1}{2\sqrt{\cos(x) + 1}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\cos(x) + 1}{\sin(x) - 1}} \cdot (\cos(x) + \sin(x) - 1)}{\sin(x)}$$

$$\int \sqrt{1 - \sin(x)} dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{2\sqrt{1 - \sin(x)} \cdot (\sin(x) + 1)}{\cos(x)}$$

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \text{ simplify} \rightarrow x \cdot \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \cdot i - a \cdot \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \cdot i - a \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - 1\right) \cdot i + a \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + 1\right) \cdot i$$

Примеры неверного вычисления неопределенных интегралов

Аналитическое решение дает иные результаты:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin x}}.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} &= \left[ \begin{array}{l} \sqrt{1-\sin x} = t, \cos x = \sqrt{1-(1-t^2)^2} = \sqrt{2t^2-t^4} \\ 1-\sin x = t^2, -\cos x dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{-t^2 \sqrt{2-t^2}} = \\
&= -2 \int \frac{dt}{t \sqrt{2-t^2}} = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{t} = u, -\frac{1}{t^2} dt = du = -u^2 dt, \\ \sqrt{2-t^2} = \sqrt{2-\frac{1}{u^2}} = \frac{\sqrt{2u^2-1}}{u} \end{array} \right] = \sqrt{2} \int \frac{d(\sqrt{2}u)}{\sqrt{2u^2-1}} = \sqrt{2} \ln |\sqrt{2}u + \sqrt{2u^2-1}| + C = \\
&= \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin x}} + \sqrt{\frac{2}{1-\sin x} - 1} \right| + C = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin x}} + \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \right| + C.
\end{aligned}$$

2.  $\int \sqrt{1-\sin x} dx.$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-\sin x} dx &= \left[ \begin{array}{l} 1-\sin x = t, -\cos x dx = dt, \\ \cos x = \sqrt{1-(1-t)^2} = \sqrt{2t-t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{t} dt}{-\sqrt{2t-t^2}} = \\
&= \int \frac{d(2-t)}{\sqrt{2-t}} = 2\sqrt{2-t} + C = 2\sqrt{1+\sin x} + C.
\end{aligned}$$

3.  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx.$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \left[ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = t, \frac{a+x}{a-x} = t^2, at^2 - xt^2 = a+x, \\ at^2 - a = xt^2 + x, x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}, dx = a \frac{2t(t^2+1) - (t^2-1) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt = \\ = a \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right] = \\
&= \int ta \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt = 4a \int \frac{t \cdot t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{4}{2} a \int \frac{t}{(t^2+1)^2} d(t^2+1) = -2a \int \operatorname{td} \left( \frac{1}{t^2+1} \right) = \\
&= -2at \left( \frac{1}{t^2+1} \right) + 2a \int \frac{dt}{t^2+1} = -2at \left( \frac{1}{t^2+1} \right) + 2a \cdot \operatorname{arctgt} + C = -2a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \cdot \frac{1}{\frac{a+x}{a-x} + 1} + \\
&+ 2a \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C = -\sqrt{(a^2-x^2)} + 2a \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.
\end{aligned}$$

Проверка.

$$\begin{aligned} \left( -\sqrt{(a^2 - x^2)} + 2a \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right)' &= \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} + 2a \frac{1}{1 + \frac{a+x}{a-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}} \cdot \frac{a+x+a-x}{(a-x)^2} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} + 2a \frac{(a-x)}{2a} \cdot \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} \frac{a}{(a-x)^2} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} + \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}. \end{aligned}$$

Вышеприведенные примеры демонстрируют тот факт, что некритичное использование вычислительного пакета MathCad может приводить к плохим результатам.

Первообразные вычисляются только при помощи символьного процессора, константа  $C$  при этом не отображается. Если необходимо вычислить неопределенный интеграл, необходимо на панели инструментов *Математический анализ* щелкнуть на значок интеграла, в образовавшемся поле заполнить два местозаполнителя — подынтегральную функцию и переменную, по которой производится дифференцирование. Позволяется вычислять первообразные от элементарных функций, рациональных дробей, иррациональностей, тригонометрических функций, показательных-степенных функций и др. Приводятся примеры вычисления некоторых неопределенных интегралов:

1. $\int x \, dx \rightarrow \frac{x^2}{2}$	5. $\int \frac{x}{x^2 + 3} \, dx \rightarrow \frac{\ln(x^2 + 3)}{2}$
2. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx \rightarrow \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}$	6. $\int \frac{1}{x + 1} \, dx \rightarrow \ln(x + 1)$
3. $\int \frac{1}{(x + 3) \cdot (x - 3)} \, dx \rightarrow \frac{\ln\left(\frac{x - 3}{x + 3}\right)}{6}$	7. $\int \frac{1}{\cos(2x)^2} \, dx \rightarrow \frac{\tan(2x)}{2}$
4. $\int \tan(3x) \, dx \rightarrow -\frac{\ln(\cos(3x))}{3}$	8. $\int \frac{1}{\sin(2x)} \, dx \rightarrow \frac{\ln(\tan(x))}{2}$

Вычисление неопределенных интегралов

Здесь разберем все примеры 1–8, решив их аналитически.

1.  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$  (табличный интеграл от степенной функции

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C).$$

2. Есть несколько способов решения данного интеграла, разберем два. Это интеграл от функции, которая задает верхнюю полуокружность с центром  $O(0,0)$ ,  $R=1$ .

2.1. Применяется возвратное интегрирование при помощи интегрирования по частям  $\int UdV = UV - \int VdU$ :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \sqrt{1-x^2} \cdot x - \int x d\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} \cdot x + \int \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \sqrt{1-x^2} \cdot x - \int \frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} \cdot x - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x + C. \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot x}{2} + C. \end{aligned}$$

2.2. Используя тригонометрическую замену:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= [x = \sin t, dx = \cos t dt] = \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int \frac{dt}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \\ [t = \arcsin x, \cos x &= \sqrt{1-x^2}, \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}]. \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

3. Используем разложение сложных дробей на элементарные дроби. Задача взятия интеграла сводится к нахождению коэффициентов  $A$  и  $B$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-3)(x+3)} &= \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}, \\ \int \frac{dx}{(x-3)(x+3)} &= A \ln|x-3| + B \ln|x+3| = \ln|x-3|^A |x+3|^B + C. \end{aligned}$$

MathCad позволяет производить данное разложение при помощи *Символьные операции-Переменная-Преобразовать к дробно-рациональ-*



ному виду (*Symbolics-Variable-Convert to Partial Fraction*), предварительно выделив переменную в записи дроби, которую требуется преобразовать.

<p>1. <math>\frac{1}{(x-3) \cdot (x+3)}</math></p> <p><math>\frac{1}{6 \cdot (x-3)} - \frac{1}{6 \cdot (x+3)}</math></p>	<p>3. <math>\frac{1}{(x-3)^2 \cdot (x^2+3)^2}</math></p> <p><math>\frac{\frac{x}{24} + \frac{1}{24}}{(x^2+3)^2} + \frac{\frac{x}{144} + \frac{1}{72}}{x^2+3} - \frac{1}{144 \cdot (x-3)} + \frac{1}{144 \cdot (x-3)^2}</math></p>
<p>2. <math>\frac{1}{(x-3)^2 \cdot (x+3)}</math></p> <p><math>\frac{1}{36 \cdot (x+3)} - \frac{1}{36 \cdot (x-3)} + \frac{1}{6 \cdot (x-3)^2}</math></p>	<p>4. <math>\frac{1}{(x-3)^2 \cdot (x^2+3)}</math></p> <p><math>\frac{\frac{x}{24} + \frac{1}{24}}{x^2+3} - \frac{1}{24 \cdot (x-3)} + \frac{1}{12 \cdot (x-3)^2}</math></p>

Разложение дробей на элементарные дроби

Под цифрой 1 (с. 43) приводится разложение интересующей нас дроби на элементарные. Проведем разложение методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)},$$

$$1 = Ax + 3A + Bx - 3B:$$

$$\begin{cases} 1 = 3A - 3B, \\ 0 = A + B. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6}, \\ B = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| = \ln \frac{|x-3|^{\frac{1}{6}}}{|x+3|^{\frac{1}{6}}} + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$$

Поясним разложение под цифрой 2:

$$\frac{1}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x+3)}.$$

$$1 = Ax^2 - 9A + Bx + 3B + Cx^2 - 6Cx + 9C.$$

$$1 = (A+C)x^2 + (B-6C)x + 9(C-A) + 3B.$$

$$\begin{cases} 9(C-A) + 3B = 1, \\ A+C = 0, \\ B-6C = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C = -\frac{1}{36}, \\ B = 6C = \frac{1}{6}, \\ C = \frac{1}{36}. \end{cases}$$

Остальные разложения читатель может выполнить самостоятельно.

$$4. \int \operatorname{tg} 3x dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d \cos 3x}{\cos 3x} = -\frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C.$$

$$5. \int \frac{x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 3| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x+1} = \ln |x+1| + C.$$

$$7. \int \frac{1}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + C.$$

$$8.1. \int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

$$8.2. \int \frac{dx}{\sin 2x} = \left[ \begin{array}{l} \cos 2x = t, -2 \sin 2x dx = dt, \\ \sin 2x = \sqrt{1 - \cos^2 2x} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{-2 \sin^2 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right) = -\frac{1}{4} \ln \left( \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin^2 x} \right) = \frac{1}{4} \ln (\operatorname{tg} x)^2 = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

Самостоятельный интерес представляют интегралы от класса элементарных функций — интегралы от обратных гиперболических функций. Они вычисляются по формуле интегрирования по частям:

$$\int U dV = UV - \int V dU.$$

$$1. \int \operatorname{arsh} x dx = x \cdot \operatorname{arsh} x - \int x d(\operatorname{arsh} x) = x \cdot \operatorname{arsh} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = x \cdot \operatorname{arsh} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \\ = x \cdot \operatorname{arsh} x - \sqrt{x^2+1} + C.$$

$$2. \int \operatorname{arch} x dx = x \cdot \operatorname{arch} x - \int x d(\operatorname{arch} x) = x \cdot \operatorname{arch} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = x \cdot \operatorname{arch} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \\ = x \cdot \operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + C.$$

$$3. \int \operatorname{arch} x dx = x \cdot \operatorname{arch} x - \int x d(\operatorname{arch} x) = x \cdot \operatorname{arch} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx = x \cdot \operatorname{arch} x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \\ = x \cdot \operatorname{arch} x + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

$$4. \int \operatorname{arth} x dx = \int \operatorname{arth} x dx = x \cdot \operatorname{arth} x - \int x d(\operatorname{arth} x) = \\ = x \cdot \operatorname{arth} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx = x \cdot \operatorname{arth} x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = x \cdot \operatorname{arth} x + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

В стандартной таблице интегралов можно увидеть следующие интегралы, называемые для удобства запоминания формулами «длинного» и «высокого» логарифмов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C.$$

Заметим, что в правой части каждого из уравнений стоят обратные гиперболические функции. Эти выражения можно лучше понять и проще запомнить после нахождения производных к выведенным в первой главе обратным гиперболическим функциям.

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \left( \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right)' = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2+1})} \left( 1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$(\operatorname{Arch} x)' = \left( \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \right)' = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2-1})} \left( 1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$(\operatorname{Arth} x)' = \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right)' = \frac{1}{2} \frac{(1-x)}{(1+x)} \left( \frac{(1-x) - (1+x)}{(1-x)^2} \right) = \frac{1}{x^2-1}.$$

$$(\operatorname{Arcthx})' = \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \right)' = \frac{1}{2} \frac{(x-1)}{(x+1)} \left( \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)^2} \right) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

#### 4.2.2. Нахождение определенных интегралов

Определенные интегралы вычисляются по формуле Ньютона-Лейбница:  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

Их можно вычислять в MathCad как при помощи символьного, так при помощи численного процессоров. Для этого необходимо обратиться к значку интеграла с двумя дополнительными местозаполнителями на панели инструментов *Математический анализ*, соответствующими верхнему и нижнему пределам интегрирования.

$\int_1^3 \sqrt{x+1} dx \rightarrow \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$	$\int_1^3 \sqrt{x+1} dx = 3.448$
$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \rightarrow \frac{\pi}{4}$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 0.785$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx \rightarrow \frac{\ln(2)}{2}$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = 0.347$
$\int_{-3}^0 \cosh(x) dx \rightarrow \sinh(3)$	$\int_{-3}^0 \cosh(x) dx = 10.018$

Вычисление определенных интегралов  
с помощью символьного и численного процессоров

Для обращения к численному процессору необходимо вместо стрелки ввести с клавиатуры (либо воспользовавшись кнопкой на панели инструментов) знак равенства «=».

Некоторые примеры вычисления как при помощи символьного, так и при помощи численного процессоров приведены в п. 4.2.2.

### 4.2.3. «Неберущиеся» в элементарных функциях интегралы

Помимо интегралов, сводящихся к табличным, существует большое количество, так называемых, «неберущихся» в элементарных функциях интегралов. В отличие от процедуры взятия производных процедура взятия интеграла в общем случае выводит из класса элементарных функций. То есть первообразная для некоторых функций не может быть записана, исходя из набора основных классов элементарных функций и их суперпозиции. Для их вычислений требуются численные методы. Основные функции, такие как интегральный синус

$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$ , интегральный косинус  $Ci(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$ , ин-

тегральный гиперболический синус  $Shi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$ , интегральный

гиперболический косинус  $Chi(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\operatorname{Ch} t - 1}{t} dt$ , экспоненци-

альный интеграл  $Ei(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\exp(x)}{x} dx$ ,  $Ei(-t) = -\int_t^\infty \frac{e^x}{x} dx$ , функция оши-

бок  $\operatorname{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-x^2) dx$  и другие, являются типичными приме-

рами неберущихся в элементарных функциях интегралов.

Эти функции являются встроенными функциями, входящими в ряд специальных либо аналитических, либо статистических или некоторых других. Значения вышеупомянутых функций сведены в таблицы, которые можно найти в справочных изданиях, но с применением вычислительных программ, таких как MathCad, использование таблиц становится ненужным.

Постоянная Эйлера  $C$ , в MathCad имеет буквенное обозначение « $\gamma$ », значение которого может быть возвращено при помощи символьного процессора с заданной точностью (задается *Float*). Значение постоянной Эйлера в расчете принимается равным  $C = 0,5772$ .

На листинге (с. 48) приводятся расчеты интегральных синуса, косинуса, гиперболического косинуса и функции ошибок при значении  $t = 1$  при помощи встроенных функций, а также путем непосредственного расчета интегралов численным, либо символьным процессором MathCad.

<b>Интегральный синус</b>	
$\text{Sinus}(t) := \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$	$\text{Si}(1) \text{ float } , 3 \rightarrow 0.946$
	$\text{Sinus}(1) \text{ float } , 3 \rightarrow 0.946$
<b>Интегральный косинус</b>	
$\text{Cosinus}(t) := - \int_t^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$	$\text{Ci}(1) \text{ float } , 3 \rightarrow 0.337$
	$\text{Cosinus}(1) \text{ float } , 3 \rightarrow 0.337$
<b>Интегральный гиперболический косинус</b>	
$C := 0.5772$	$\gamma \text{ float } , 4 \rightarrow 0.5772$
$\text{Hyp\_cos}(t) := C + \ln(t) + \int_0^t \frac{\cosh(x) - 1}{x} dx$	$\text{Chi}(1) \text{ float } , 3 \rightarrow 0.838$
	$\text{Hyp\_cos}(1) = 0.838$
<b>Экспоненциальный интеграл</b>	
$\text{exp\_int1}(t) := \int_{-\infty}^t \frac{e^x}{x} dx$	$\text{Ei}(-1) \text{ float } , 3 \rightarrow -0.219$
	$\text{exp\_int1}(-1) = -0.219$
$\text{exp\_int2}(t) := - \int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$	$\text{exp\_int2}(1) \text{ float } , 3 \rightarrow -0.219$
<b>Функция ошибок</b>	
$\text{Oh}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-x^2} dx$	$\text{erf}(1) = 0.843$
	$\text{Oh}(1) = 0.843$

Неберущиеся интегралы, рассчитанные при помощи встроенных функций, а также согласно их определению

Под интегралами Френеля в различной литературе принято понимать разные функции, а именно:  $C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ ,  $S(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ , а также  $C(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \cos(x^2)dx$ ,  $S(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sin(x^2)dx$ . Встроенные интегралы Френеля в MathCad называются  $\text{FrenelC}(t)$  и  $\text{FrenelS}(t)$ .

$$C(t) = \text{FrenelC}(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx, \quad S(t) = \text{FrenelS}(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx.$$

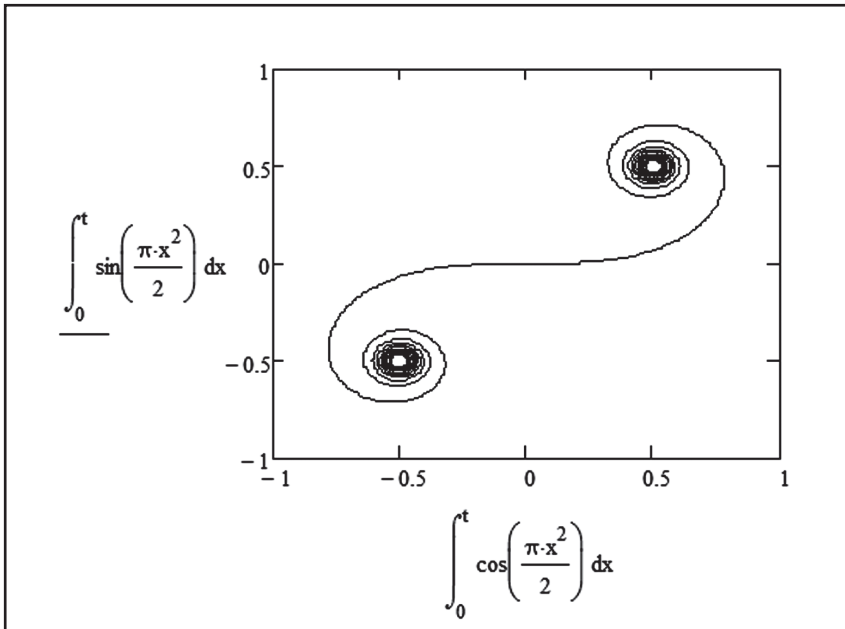
Вызов встроенных функций Френеля, пример нахождения  $Ci(1)$  и  $Si(1)$ , а также расчет интегралов  $Fr_C(t)$ ,  $Fr_S(t)$ :

$$\begin{aligned} Fr_C(t) &:= \int_0^t \cos\left(\frac{\pi \cdot x^2}{2}\right) dx \text{ float, 3} \rightarrow 0.78 & FresnelC(1) \text{ float, 3} \rightarrow 0.78 \\ Fr_S(t) &:= \int_0^t \sin\left(\frac{\pi \cdot x^2}{2}\right) dx \text{ float, 3} \rightarrow 0.438 & FresnelS(1) \text{ float, 3} \rightarrow 0.438 \end{aligned}$$

Интегралы Френеля

Функция в параметрическом виде  $\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi \cdot x^2}{2}\right) \\ y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi \cdot x^2}{2}\right) \end{cases}$  известна как

спираль Корню и находит широкое применение в физике дифракционных явлений:



Спираль Корню

Иногда необходимо для функции  $y(x)$ , заданной аналитически, определить ее дискретные значения в зависимости от изменяющегося с определенным шагом  $h$  аргумента  $x$ ,  $x_i = x_0 + h \cdot i$ , то есть табулировать функцию. Для того чтобы это сделать, необходимо ввести ранжированную переменную  $i$ , создать массив значений переменной  $x_i$  и вывести соответствующие им значения функции  $y(x_i)$ . ORIGIN задает значение, начиная с которого идет нумерация, и может принимать 0 (по умолчанию) либо 1.

ORIGIN := 1			
		i := 1 .. 10	
		$x_i := 1 + 0.2 \cdot i$ $y(x) := x^3 + 2$	
x =		1	
	1	1.2	
	2	1.4	
	3	1.6	
	4	1.8	
	5	2	
	6	2.2	
	7	2.4	
	8	2.6	
	9	2.8	
	10	3	
		y(x) =	
			1
		1	3.728
		2	4.744
		3	6.096
		4	7.832
		5	10
		6	12.648
		7	15.824
		8	19.576
		9	23.952
		10	29

Табулирование функции  $y(x) = x^3 + 2$  на отрезке  $[1, 2, 3]$   
с шагом  $h = 0,2$

В данном примере задана нумерация с единицы.

Собственный интерес представляет неберущийся интеграл

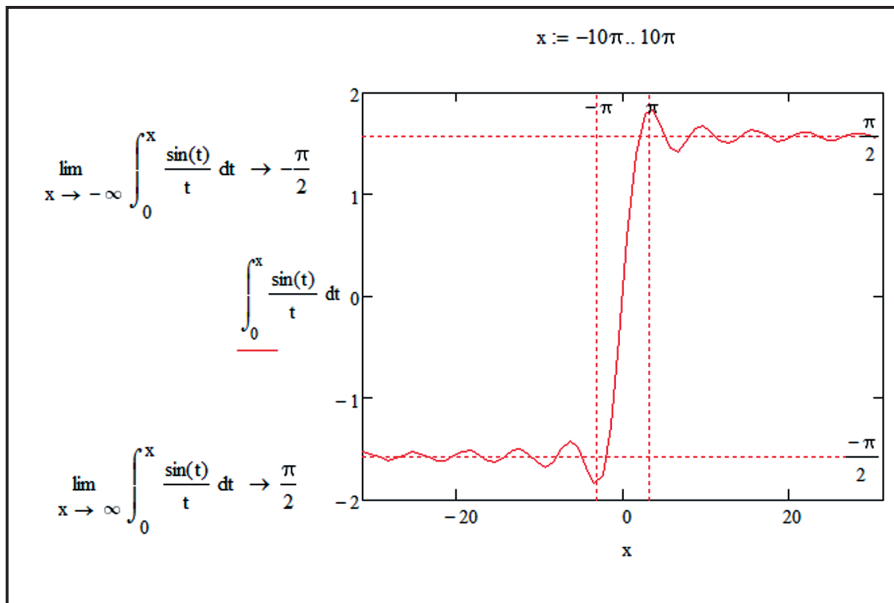
$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$ , который называют интегральным синусом. Если



рассматривать интегральный синус  $Si(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$  как функцию

от переменного верхнего предела  $t$ , то можно построить ее график. Горизонтальные асимптоты по определению вычисляются как

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt :$$



Интегральный синус как функция переменного  
верхнего предела

#### 4.2.4. Несобственные интегралы

Напомним, что несобственный интеграл — это обобщение определенного интеграла при бесконечном промежутке интегрирования, либо на неограниченную подынтегральную функцию. При вычислениях определенных интегралов подынтегральная функция ограничена, а отрезок интегрирования конечен.

#### 4.2.4.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (первого рода)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Если предел в правой части конечен, то интеграл называют сходящимся, если бесконечен или не существует, то — расходящимся.

Приводятся некоторые примеры вычисления несобственных интегралов первого рода.

$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow \pi$
$\int_3^{\infty} \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty$	$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \rightarrow 1$
$\int_0^{\infty} e^{-3x} \cdot \sin(2x) dx \rightarrow \frac{2}{13}$	$\int_0^{\infty} \sin(x) dx \rightarrow \text{undefined}$

Расчет несобственных интегралов с бесконечными пределами

$$1. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg \Big|_0^A = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_3^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \Big|_3^A = \infty.$$

$$3. \int_0^{\infty} \exp(-3x) \sin 2x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \exp(-3x) \sin 2x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} I_1.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^A \exp(-3x) \cdot \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^A \exp(-3x) \, d(\cos 2x) = \\
&= -\frac{1}{2} \left( \exp(-3x) \cdot \cos 2x \Big|_0^A - \int_0^A \cos 2x d(\exp(-3x)) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left( \exp(-3A) \cdot \cos 2A - 1 + 3 \int_0^A \exp(-3x) \cos 2x dx \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left( \exp(-3A) \cdot \cos 2A - 1 + \frac{3}{2} \int_0^A \exp(-3x) d(\sin 2x) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left( \exp(-3A) \cdot \cos 2A - 1 + \frac{3}{2} \left( \exp(-3x) \cdot \sin 2x \Big|_0^A - \int_0^A \sin 2x d(\exp(-3x)) \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left( \exp(-3A) \cdot \cos 2A - 1 + \frac{3}{2} \left( \exp(-3x) \cdot \sin 2x \Big|_0^A + 3 \int_0^A \exp(-3x) \cdot \sin 2x dx \right) \right). \\
I_1 &= -\frac{1}{2} \exp(-3A) \cdot \cos 2A + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \exp(-3A) \cdot \sin 2A - \frac{9}{4} I_1. \\
I_1 &= -\frac{2}{13} \left( \exp(-3A) \cdot \cos 2A - 1 + \frac{3}{2} \exp(-3A) \cdot \sin 2A \right).
\end{aligned}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{2}{13} \left( \exp(-3A) \cos 2A - 1 + \frac{3}{2} \exp(-3A) \sin 2A \right) = \frac{2}{13}$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \Big|_A^0 + \lim_{B \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \Big|_0^B = \pi.$$

$$5. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{A} - \frac{-1}{1} \right) = 1.$$

$$6. \int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \sin x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_0^A \text{ — не имеет смысла.}$$

#### 4.2.4.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\cdot \rightarrow 0} \int_a^{b-\cdot} f(x) dx$$

Далее приведены примеры расчета несобственных интегралов второго рода. Далее в тексте приводятся аналитические решения разбираемых примеров.

$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \rightarrow \frac{9}{2}$
$\int_0^1 \ln(x) dx \rightarrow -1$	$\int_{-3}^3 \frac{2x}{x^2 - 1} dx \rightarrow \text{undefined}$
$\int_1^2 \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx \rightarrow \infty$	$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \frac{\pi^2}{8}$

Расчет несобственных интегралов от неограниченных функций

$$1. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\cdot \rightarrow 0} \int_{-1+\cdot}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\cdot \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\cdot}^0 = \lim_{\cdot \rightarrow 0} (-\arcsin(-1+\cdot)) = \frac{\pi}{2}.$$

2.

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \ln x \cdot x \Big|_{\eta}^1 - \int_{\eta}^1 x d(\ln x) \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \ln x \cdot x \Big|_{\eta}^1 - x \Big|_{\eta}^1 \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (-\ln \eta \cdot \eta - 1 + \eta) = -1.$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int_1^2 \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_1^2 = -\infty.$$

$$4. \int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} \Big|_{-1}^8 = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}.$$

$$5. \int_{-3}^3 \frac{2x dx}{x^2 - 1} = \int_{-3}^3 \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \ln |x^2 - 1| \Big|_{-3}^3. \text{ Особые точки } x = \pm 1 \text{ обращают пер-}$$

вообразную в бесконечность. Интеграл не существует.

$$6. \int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

## 4.2.5. Эллиптические интегралы

С эллиптическим интегралом на практике можно столкнуться при решении, например, задачи нахождения длины дуги эллипса. В каноническом виде уравнение эллипса задается следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ параметрически: } \begin{cases} x(t) = a \cos(t), \\ y(t) = b \sin(t). \end{cases} \text{ Тогда длина } l \text{ дуги эллипса}$$

определяется как

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt,$$

где  $\mu = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  — эксцентриситет эллипса. Интеграл  $E(k)$  не берется

в элементарных функциях и называется полным эллиптическим интегралом второго рода:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Эллиптическим интегралом второго рода  $E(\varphi, k)$  называется

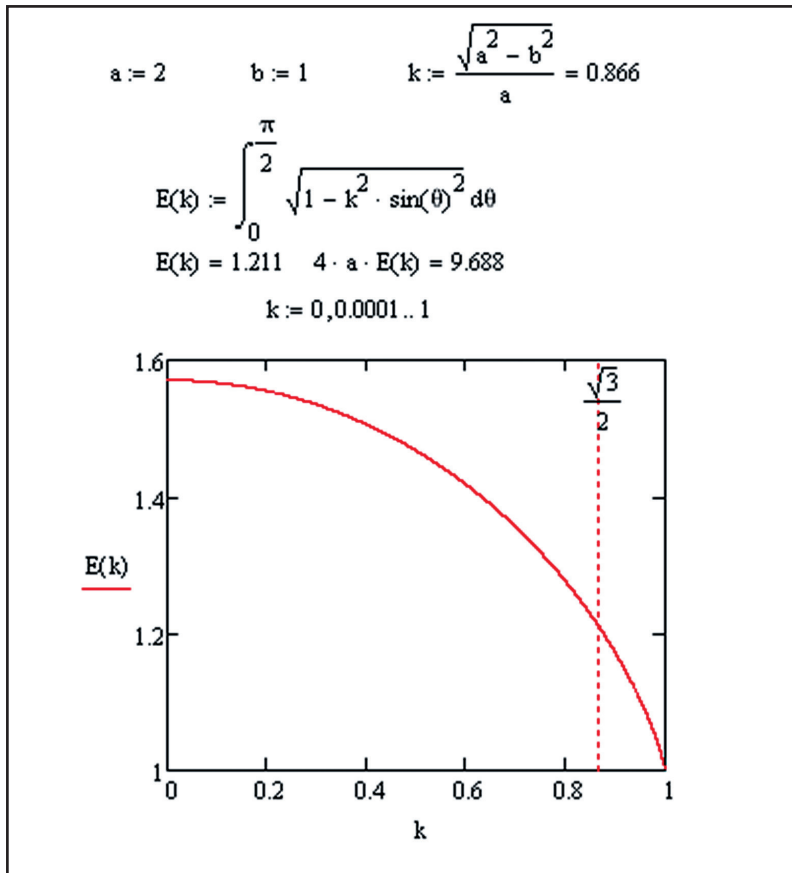
$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx = \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Эллиптическим интегралом первого рода  $F(\varphi, k)$  называется

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - k^2 x^2)(1 - x^2)}}.$$

Функции  $E(k)$ ,  $E(\varphi, k)$ ,  $F(\varphi, k)$  не берутся в элементарных функциях и табулированы. В MathCad нет встроенных функций, которые позволяли бы рассчитывать  $E(k)$ ,  $E(\varphi, k)$ ,  $F(\varphi, k)$ , но можно провести их вычисления, опираясь на понимание определенного интеграла как площади.

Например, необходимо найти полную длину дуги эллипса, полуоси которого  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Для этого необходимо вычислить полный эллиптический интеграл второго рода  $4a \cdot E(\varepsilon) = 4a \cdot E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .



К вычислению длины дуги эллипса с эксцентриситетом равным  $\varepsilon$

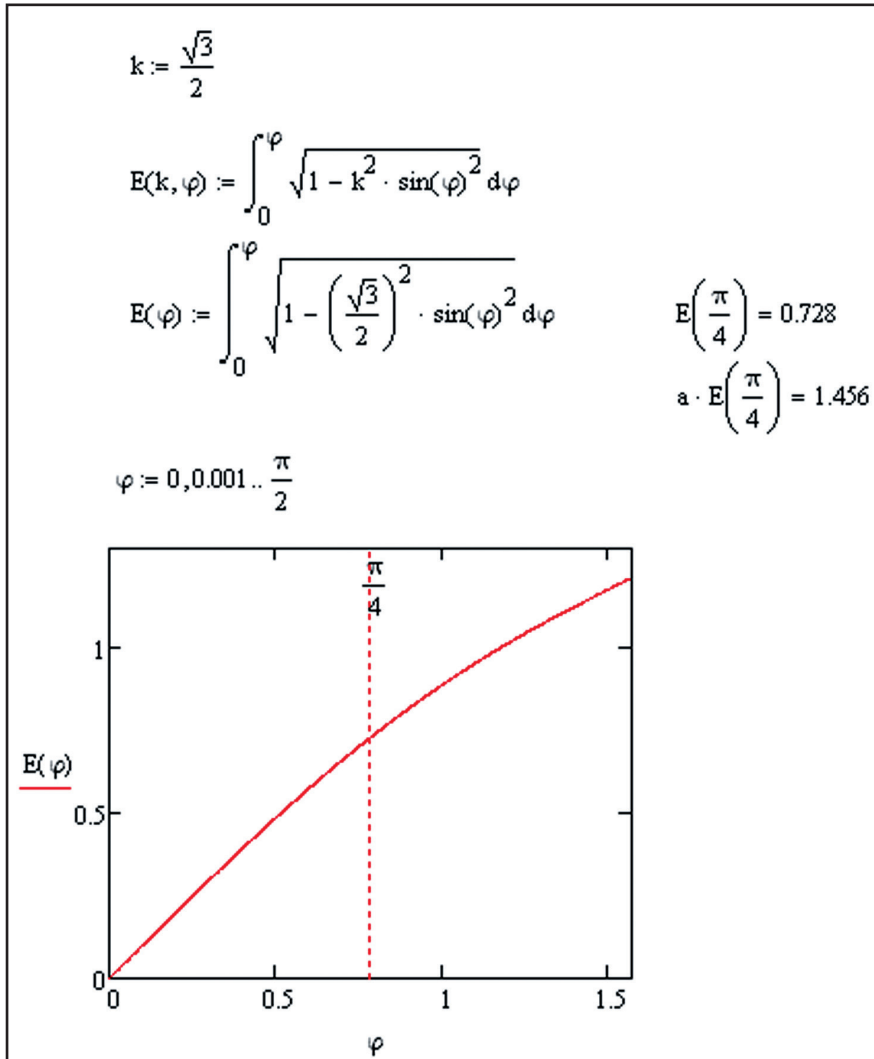
График показывает значения полного эллиптического интеграла второго рода  $E(k)$  при  $k \in (0, 1)$ . Взятие интеграла численными методами дает значение полной длины дуги эллипса:

$$l = 4a \cdot E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9,688.$$

При  $k = 0$  и  $k = 1$  эллиптический интеграл вырождается в определенный, берущийся в элементарных функциях:

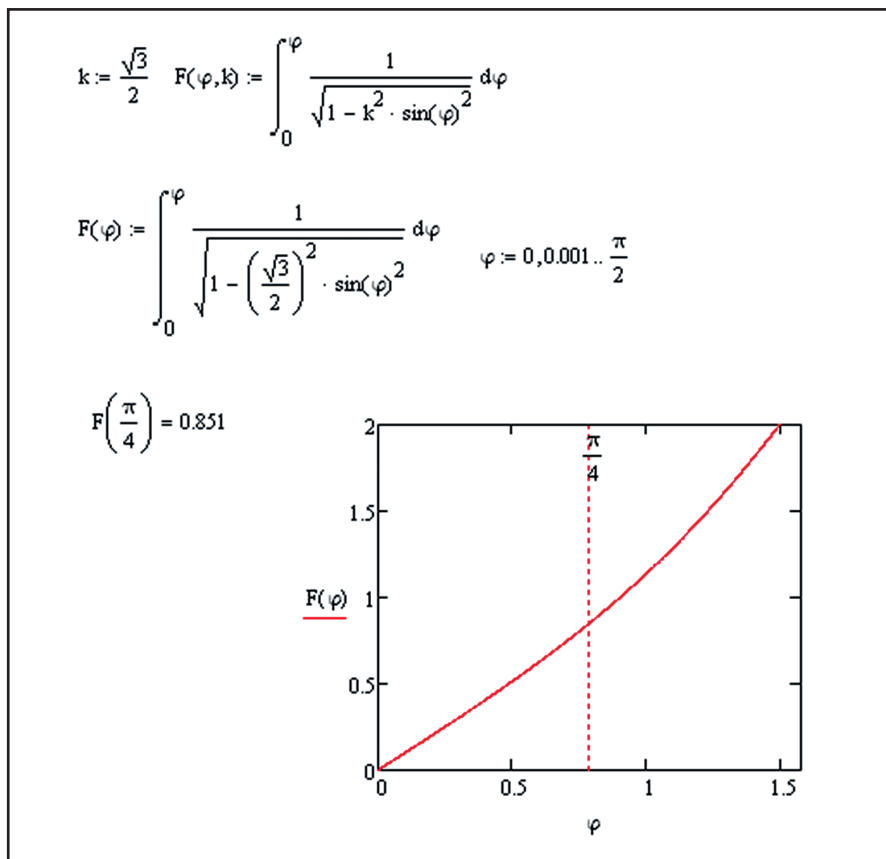
$$E(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Приводятся вычисления эллиптического интеграла второго и первого родов при  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



К вычислению эллиптического интеграла

второго рода при  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$



К вычислению эллиптического интеграла

первого рода при  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$

#### 4.2.6. Интегралы, зависящие от параметра

Интегралом, зависящим от параметра  $y$ , называют

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Полагают, что при каждом постоянном значении  $y$  функция  $f(x, y)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  в собственном или несобственном смысле.

**Бэта-функция** (эйлеров интеграл первого рода):

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$



$$B(a, b) = B(b, a) = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Другим замечательным интегралом является интеграл, который называют **гамма-функцией** (либо, реже, эйлеровым интегралом второго рода).

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \exp(-x) dx$$

График данной функции показан на с. 60.

Формула приведения:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+1) &= \int_0^{\infty} x^a \exp(-x) dx = \int_0^{\infty} x^a d(-\exp(-x)) = -x^a \cdot \exp(-x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-x) d(x^a) = \\ &= a \int_0^{\infty} \exp(-x) \cdot x^{a-1} dx = a \cdot \Gamma(a). \end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \exp(-x) dx = -\exp(-x) \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Теперь

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \Gamma(1) = 1.$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(1+2) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot \Gamma(1+1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(1+3) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot \Gamma(2+1) = 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 6.$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Значения гамма-функции от целочисленного аргумента  $\Gamma(n+1)$  — является  $n$ -факториалом.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \exp(-x) dx = \left[ x = t^2, t = \sqrt{x}, dx = 2t dt \right] = 2 \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t} t dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t} t dt = 2 \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt. \end{aligned}$$

Этот несобственный интеграл называется интегралом ошибок (или интегралом Пуассона). Один из способов его вычисления (самый про-

стой) основан на нахождении квадрата этого интеграла при помощи

полярной замены:  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy$ .

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy = \left[ x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2} \right].$$

$$J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^2) r dr =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) r dr = \pi \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) dr^2 =$$

$$= -\pi \exp(-r^2) \Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$J = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

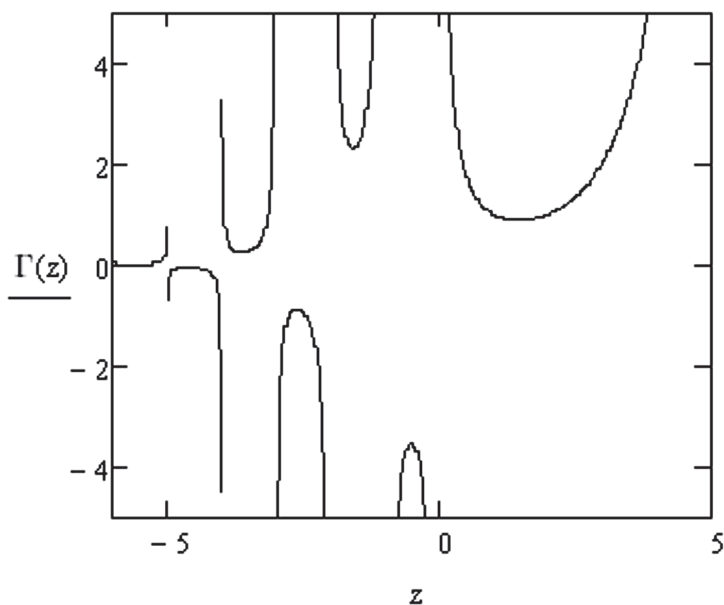


График гамма-функции

## 4.2.7. Взятие интегралов с использованием гамма-функции

Пусть необходимо взять интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$ ;  $n, m \in \mathbb{Z}, n, m \geq 0$

Перейдем к замене:

$$\sin^2 x = u, \sin^n x = (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}} = u^{\frac{n}{2}}.$$

$$\cos^m x = (\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{m}{2}} = (1 - u)^{\frac{m}{2}}.$$

$$du = 2 \sin x \cos x dx = 2 (\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} dx = 2u^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - u)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$dx = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - u)^{-\frac{1}{2}} du.$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2} + 1\right)}.$$

Рассмотрим конкретный пример:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{4 \cdot 2!} = \frac{\pi}{16}.$$

Очевидный способ решения задачи взятия определенного интеграла от произведения тригонометрических функций следующий:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{32} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

---

## 5. Численные методы и приближенные вычисления

---

**В** Mathcad реализуются два варианта непосредственного вычисления интегралов: при помощи символьного и численного процессоров.

В этой главе рассматриваются алгоритмы, заложенные в нахождении определенных интегралов, которые позволяют вычислять интегралы численными методами.

### 5.1. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

---

Существует множество методов их вычисления, основанных на том, что отрезок интегрирования разбивается на  $N$  отрезков, на каждом из них подынтегральная функция аппроксимируется функцией одного типа, находится сумма площадей под графиками каждой из функций, что понимается как значение интеграла, рассчитанного численно. Такие методы нахождения интегралов необходимо применять, прежде всего, в случае «неберущихся» интегралов. Аппроксимирующие функции могут быть константами, прямыми, параболлами, а также, в более сложном случае, иметь полиномиальную зависимость.

Ограничимся тремя основными методами вычисления — методом треугольников (левых, правых и средних), методом трапеций и методом Симпсона (методом парабол) и рассмотрим каждый из них, на при-

мере вычисления интегрального синуса  $\text{Si}(1) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ . Пусть необходимо взять определенный интеграл  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ . Построим график функции  $y = \frac{\sin(x)}{x}$  на отрезке  $[0,1]$ , где  $y(x) > 0$ . Представим определенный интеграл  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  как площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции  $y = \frac{\sin(x)}{x}$ , снизу прямой  $y = 0$ , слева и справа прямыми  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Тогда для вычисления площади данной фигуры разобьем ее на  $N$  сегментов, площади которых затем суммируем. Методы вычисления отличаются друг от друга характером сегментов. Отрезок  $[0,1]$  разбивается на  $N$  частей, тогда  $\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{N}$ . Строится сетка из дискретных значений переменной  $X$ , так что  $x_i = a + \Delta x \cdot i$ .

#### 5.1.1. Метод прямоугольников

Площадь фигуры рассматривается как сумма  $N$  прямоугольников, ширина которых равна  $\Delta x$ , высота —  $g(x_i)$  либо  $g(x_{i-1})$  (значения функции в узлах сетки). Данная функция убывает на  $[0,1]$ , и  $g(x_i) < g(x_{i-1})$ . Можно покрыть фигуру прямоугольниками так, что часть площади останется свободной либо, напротив, войдет часть избыточной площади. В первом случае расчет будет производиться методом правых прямоугольников, во втором — левых:  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $l = g(a + h(i-1))$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  — ширина и высота прямоугольников для метода левых прямоугольников;  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $l = g(a + hi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  — ширина и высота прямоугольников для метода правых прямоугольников. Если значение функции  $y = g(x)$  находят в серединной точке интервала  $[x_{i-1}, x_i]$ , то есть находят  $g\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$ , тогда метод называется методом средних

прямоугольников:  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $l = g\left(a + \frac{h}{2}(2i-1)\right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  — ширина

и высота прямоугольников для метода средних прямоугольников.

### 5.1.2. Метод трапеций

В данном методе площадь приближается суммой  $N$  трапеций, высота которых постоянна и  $h = \frac{b-a}{N}$ .

Сумма оснований  $l_1 + l_2 = g(a + h(i-1)) + g(a + hi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Площадь трапеции  $S_{tr} = \frac{h}{2}(l_1 + l_2)$ .

### 5.1.3. Метод Симпсона

Отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $2N$  отрезков, тогда ширина каждого равна  $h = \frac{b-a}{2N}$ . Суть метода заключается в том, что на каждом отрезке  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  подынтегральная функция аппроксимируется параболой  $f_i = ax_i^2 + bx_i + c_i$ , проходящей через три последовательных точки сетки, значение функции в которых

$$f(x_{2i-2}) = f(0) = c_i, f(x_{2i-1}) = f(h) = a_i h^2 + b_i h + c_i, f(x_{2i}) = f(2h) = 4a_i h^2 + 2b_i h + c_i.$$

Тогда интеграл может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i \cdot x^2 + b_i \cdot x + c_i) dx = \sum_{i=1}^N \left( a_i \frac{x^3}{3} + b_i \frac{x^2}{2} + c_i x \right) \Big|_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left( a_i \frac{x^3}{3} + b_i \frac{x^2}{2} + c_i x \right) \Big|_0^{2h} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{8h^3 a_i}{3} + 2h^2 b_i + 2c_i h \right) = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^N (8h^2 a_i + 6hb_i + 6c_i) = \\ &= \frac{h}{3} \sum_{i=1}^N (f(2h) + 4f(h) + f(0)). \end{aligned}$$

Сведем расчетные формулы, которые были использованы в вышеприведенных расчетах в табл. 3.

Таблица 3

**Расчетные формулы для взятия интегралов  
численными методами**

Метод	Прямоугольников	Левых	$S := \frac{(b-a)}{N} \left[ \sum_{i=1}^N g \left[ \left[ a + (i-1) \frac{(b-a)}{N} \right] \right] \right]$
		Правых	$S := \frac{(b-a)}{N} \left[ \sum_{i=1}^N g \left[ a + i \frac{(b-a)}{N} \right] \right]$
		Средних	$S := \frac{(b-a)}{N} \cdot \left[ \sum_{i=1}^N g \left[ \left[ a + (2i-1) \frac{(b-a)}{2N} \right] \right] \right]$
	Трапеций		$S := \frac{(b-a)}{2N} \sum_{i=1}^N \left[ g \left[ a + \frac{(b-a)}{N} (i-1) \right] + g \left[ a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i \right] \right]$
			$S := \frac{(b-a)}{2N} \left[ g(a) + g(b) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} g \left[ \left[ a + \frac{(b-a)}{N} i \right] \right] \right]$
	Симпсона		$S := \frac{(b-a)}{6N} \sum_{i=1}^N \left[ g \left[ a + \frac{(b-a)}{2N} (2i-2) \right] + \right. \\ \left. + 4g \left[ a + \frac{(b-a)}{2N} (2i-1) \right] + g \left[ a + \frac{(b-a)}{2N} 2i \right] \right]$
			$S := \frac{(b-a)}{6N} \left[ g(a) + 4 \sum_{i=1}^N g \left[ a + \frac{(b-a)}{2N} (2i-1) \right] + 2 \sum_{i=1}^{N-1} g \left[ a + \frac{(b-a)}{2N} 2i \right] + g(b) \right]$

Здесь мы не будем приводить теорию вычисления погрешностей при нахождении интегралов численными методами. Укажем лишь результаты расчетов  $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ , формулы для вычисления погрешностей, а также вычисленные значения погрешностей (табл. 4).

Таблица 4

Результаты вычислений  $S_i$  (1) различными способами  
с учетом погрешности

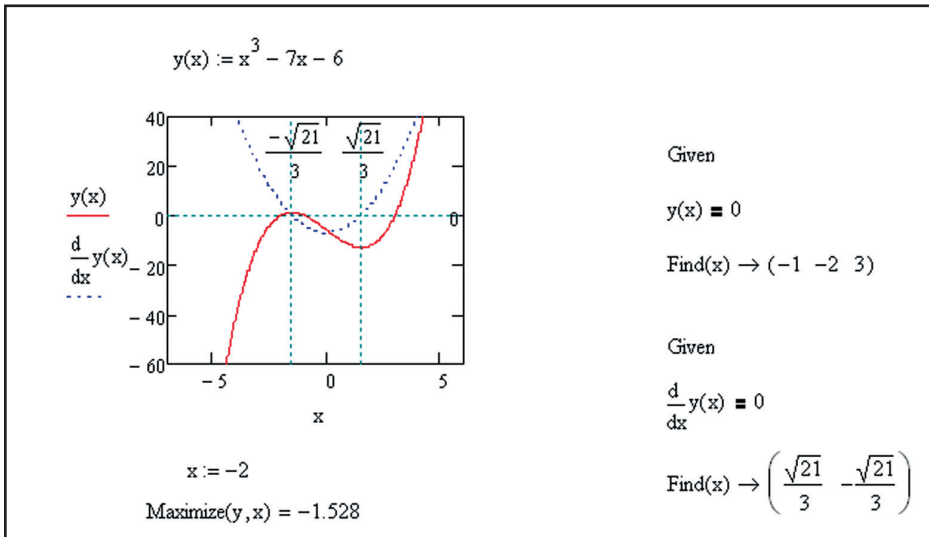
Метод вычисления					
Прямоугольников			Трапеций	Симпсона	
	Левых	Правых	Средних		
Расчет	0.946083070368	0.946084	0.946082	0.946083070365	0.9460830703671953...
Погреш-ность	$R = \frac{f(\xi)(b-a)^3}{24N^2}$	$R = \frac{f(\xi)(b-a)^2}{2N}$	$R = \frac{f(\xi)(b-a)^2}{2N}$	$R = \frac{f(\xi)(b-a)^3}{12N^2}$	$R = \frac{f(\xi)(b-a)^5}{2880N^4}$
Погреш-ность	$1,4 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-12}$	$6,9 \cdot 10^{-25}$



## 5.2. Исследование функций на экстремум

Одной из классических задач теории функций одной переменной является нахождение экстремума (глобального экстремума) либо нахождение условного экстремума функции.

Например, необходимо определить точки минимума и максимума функции  $y(x) = x^3 - 7x - 6$ , а также значение функции в этих точках.



Нахождение минимума и максимума функции  $y(x) = x^3 - 7x - 6$

Встроенные функции для нахождения экстремума:

$\text{Minimize}(f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$ ,

$\text{Maximize}(f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$ .

Необходимо обязательно задавать начальное приближение аргумента. Так, для функции  $y(x) = x^3 - 7x - 6$  максимальное значение  $y_{\max} = 1,128$  при  $x_{\max} = -1,528$ , минимальное значение  $y_{\min} = -13,128$  при  $x_{\min} = 1,528$ . На графике (с. 67) отчетливо видно, что точки экстремума являются нулями производной от исходной функции. Вместе с экстремумом определены корни исходной функции, а также корни ее производной с помощью блока *Given-Find*.

Аналитическое решение выглядит следующим образом:

$$y(x) = x^3 - 7x - 6, y'(x) = 3x^2 - 7 = 0, x = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

При  $y(x) < -\frac{\sqrt{21}}{3}$ ,  $y'(x) < 0$ ; при  $-\frac{\sqrt{21}}{3} < y(x) < \frac{\sqrt{21}}{3}$ ,  $y'(x) > 0$ ; при  $y(x) > \frac{\sqrt{21}}{3}$ ,  $y'(x) < 0$ . Тогда при  $y(x) < -\frac{\sqrt{21}}{3}$  функция монотонно убывает, при  $-\frac{\sqrt{21}}{3} < y(x) < \frac{\sqrt{21}}{3}$  — монотонно возрастает, при  $y(x) > \frac{\sqrt{21}}{3}$  — монотонно убывает, и  $x = -\frac{\sqrt{21}}{3}$  — точка минимума,  $x = \frac{\sqrt{21}}{3}$  — точка максимума.

### 5.3. Поиск корней полиномов

Если функция  $y(x)$  является полиномом, то его корни можно определить, используя встроенную функцию *polyroots* (*s*), где *s* — вектор-столбец коэффициентов полинома (от нулевой до старшей степени):

$y(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$	$y(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
$u := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$w := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\text{polyroots}(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\text{polyroots}(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Поиск корней полиномов  $y(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$  и  $y(x) = 2x^3 - 1x^2 - 2x + 1$

## 5.4. Приближенные методы нахождения корней алгебраических уравнений

В MathCad реализуется несколько алгоритмов приближенного вычисления корней уравнений. Это градиентный метод касательных и метод хорд. Но изложение начнем с простейшего метода — метода деления отрезка пополам.

### 5.4.1. Метод половинного деления

Рассмотрим алгоритм вычисления корня уравнения  $f(x) = 0$  на интервале  $[a, b]$ , при этом  $f(a), f(b)$  должны иметь разные знаки. Примем,

что  $c = \frac{a+b}{2}$ , при этом данная точка  $c$  становится границей вложенного

отрезка, причем левой границей, если  $f(a), f(c)$  имеют одинаковые знаки, или правой, если  $f(a), f(c)$  имеют разные знаки. Затем находится точка середины полученного вложенного отрезка, которая, в свою очередь, становится границей другого вложенного отрезка. Итерации проводятся до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше удвоенной величины значения погрешности. Рассмотрим данный метод на примере нахождения корня уравнения  $\frac{\sin x}{x} = 0$  на отрезке  $[0, 5]$  с точностью  $10^{-3}$ :

$$\begin{array}{l}
 f(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad \epsilon := 0.001 \\
 \\
 x := \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ b \leftarrow 5 \\ \text{while } |b - a| > 2\epsilon \\ \quad \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{a+b}{2} \\ a \leftarrow c \text{ if } f(a) \cdot f(c) > 0 \\ b \leftarrow c \text{ otherwise} \end{array} \\ \frac{a+b}{2} \end{array} \\
 \\
 x = 3.141
 \end{array}$$

Метод половинного деления отрезка для вычисления корня уравнения

С точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  алгоритм находит корень  $x = 3,141$  уравнения  $\frac{\sin x}{x} = 0$  на отрезке  $[0, 5]$ . Для этого требуется 12 итераций. Для точности  $\varepsilon = 10^{-4}$  — 15 итераций.

Решая уравнение аналитически, имеем  $\frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . На отрезке  $[0, 5]$  корень  $x = \pi$ .

«+» Метод сходится в случае любых непрерывных функций (даже недифференцируемых) для простых (не кратных) корней. Скорость сходимости небольшая, поскольку за каждую итерацию точность увеличивается в два раза.

«—» В начале расчета нужно найти такой отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки. В том случае, если на отрезке несколько корней, то процесс сойдется только к одному из них (заранее неизвестно к какому). Для корней четной кратности метод неприменим, нечетной — сходится, но менее точен. Применяется тогда, когда скорость сходимости не важна и приоритет отдается надежности.

В случае, когда на отрезке несколько корней, можно проводить удаление корней для нахождения всех корней на искомом отрезке. Для этого вводится функция  $g(x) = \frac{f(x)}{(x - \tilde{x})}$ , где  $\tilde{x}$  — найденный простой корень. Функция точно не имеет простого корня  $x = \tilde{x}$ . Но если этот корень кратный, то функция  $g(x)$  будет иметь корень  $x = \tilde{x}$  кратностью на единицу меньше.

Найдем корни уравнения  $\frac{\sin x}{x} = 0$  на отрезке  $[0, 10]$  с точностью  $10^{-3}$ .

Для этого, вышеприведенный алгоритм применяется 3 раза (по количеству корней) для введенных функций  $g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)}$ ,

$h(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}$ . По алгоритму находятся корни  $x_1 = 3,141$ ,  $x_2 = 6,284$ ,  $x_3 = 9,424$ .

Действительно, аналитическое решение  $\sin x = 0, x = \pi k \Rightarrow x_1 = \pi, x_2 = 2\pi, x_3 = 3\pi$  доказывает, что  $x = 0$  не является корнем.

$f(x) := \frac{\sin(x)}{x} \quad \varepsilon := 0.001$	$x1 := 3.141 \quad x2 := 6.284$
$x1 := \left\  \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ b \leftarrow 10 \\ \text{while }  b - a  > 2\varepsilon \\ \quad \left\  \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{a + b}{2} \\ a \leftarrow c \text{ if } f(a) \cdot f(c) > 0 \\ b \leftarrow c \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \frac{a + b}{2} \end{array} \right\ $	$h(x) := \frac{f(x)}{(x - x1) \cdot (x - x2)}$
$x1 = 3.141$	$x3 := \left\  \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ b \leftarrow 10 \\ \text{while }  b - a  > 2\varepsilon \\ \quad \left\  \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{a + b}{2} \\ a \leftarrow c \text{ if } h(a) \cdot h(c) > 0 \\ b \leftarrow c \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \frac{a + b}{2} \end{array} \right\ $
$g(x) := \frac{f(x)}{(x - x1)}$	$x3 = 9.424$
$x2 := \left\  \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ b \leftarrow 10 \\ \text{while }  b - a  > 2\varepsilon \\ \quad \left\  \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{a + b}{2} \\ a \leftarrow c \text{ if } g(a) \cdot g(c) > 0 \\ b \leftarrow c \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \frac{a + b}{2} \end{array} \right\ $	
$x2 = 6.284$	

Удаление корней для метода деления отрезка пополам

#### 5.4.2. Метод простых итераций

Если необходимо решить уравнение  $f(x) = 0$ , то в случае приведения его к виду  $x = d(x)$  используется метод простых итераций. При заданном начальном приближении  $\tilde{x} = x_0$  принимается, что  $x_1 = d(x_0)$ , строится последовательность

$$\{x_n\}: x_{n+1} = d(x_n), \text{ тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \tilde{x}.$$

Например, нужно решить уравнение  $x = \sin x - 1$ . Аналитически его решить невозможно, в то время как метод простых итераций дает ответ  $x = -1.935$ .

$$\begin{array}{l}
 d(x) := \sin(x) - 1 \\
 \\
 r(x) := \begin{array}{|l} x \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 0..9 \\ \quad x \leftarrow \sin(x) - 1 \\ x \end{array} \\
 \\
 r(x) = -1.935
 \end{array}$$

Метод простых итераций

Индивидуальный интерес представляет уравнение  $x = d(x)$ , которое называется задачей о неподвижной точке. Действительно, отображение  $d$  переводит точку  $\tilde{x}$  в саму себя из  $R_1$  в  $R_1$ . Существование и единственность корня опираются на принцип неподвижной точки (сжимающих отображений).

Чтобы  $y = d(x)$  была сжимающей на отрезке  $[a, b]$ , должны быть выполнены два условия:

$$d(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{и} \quad \exists q \in (0, 1) : |d(x_2) - d(x_1)| \leq q |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

**Теорема.** Пусть функция  $y = d(x)$  определена и дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , тогда если выполнены два условия: 1)  $d(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$ ; 2.  $\exists q : |d'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , то  $x = d(x)$  имеет единственный корень  $\tilde{x}$  на  $[a, b]$ , к этому корню сходится  $\{x_n\}$ , начинающаяся с любого  $x_0 \in [a, b]$ , при этом справедливы оценки погрешности ( $\forall k \in N$ ):

$$1) \quad |\tilde{x} - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, \quad 2) \quad |\tilde{x} - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

**Доказательство.** Возьмем  $x_0 \in [a, b]$ ,  $x_1 = d(x_0) \in [a, b]$ ,  $x_2 = d(x_1) \in [a, b]$ ,  $x_{n+1} = d(x_n) \in [a, b]$ .  $\{x_n\} \in [a, b]$  (по условию 1).

Запишем неравенство  $x_{n+1} - x_n = d(x_n) - d(x_{n-1})$  и применим к нему формулу Лагранжа:  $d(x_{n+1}) - d(x_n) = d'(\theta_k)(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1} - x_n = d'(\theta_k)(x_n - x_{n-1})$ . Ввиду условия 2 выполняется неравенство  $|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|$ . Это есть условие сжатия для элементов  $\{x_n\}$ ,  $q$  — коэффициент сжатия.

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq q|x_{n+1} - x_n| \leq q^2|x_n - x_{n-1}|. \\ |x_{n+3} - x_{n+2}| &\leq q|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq q^3|x_n - x_{n-1}|. \\ &\dots\dots\dots \\ |x_{n+i} - x_{n+i-1}| &\leq q^i|x_n - x_{n-1}|, \forall i, k \in N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_m| &\leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \dots + \\ &+ |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \leq (q^m + q^{m-1} + \dots + q^2 + q)|x_n - x_{n-1}| = \\ &= \frac{q - q^{m+1}}{1 - q}|x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

Следовательно,  $|x_n - x_{n-1}| \leq q^{k-1}|x_1 - x_0|$

Подставляя  $|x_{n+m} - x_m| \leq \frac{q - q^{m+1}}{1 - q}|x_n - x_{n-1}|$  в  $|x_n - x_{n-1}| \leq q^{k-1}|x_1 - x_0|$ ,

имеем

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{q}{1 - q}(1 - q^m)|x_n - x_{n-1}| \text{ при } m = \infty \quad |\tilde{x} - x_n| \leq \frac{q}{1 - q}|x_n - x_{n-1}|,$$

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{q^k}{1 - q}(1 - q^m)|x_1 - x_0| \text{ при } m = \infty \quad |\tilde{x} - x_n| \leq \frac{q^k}{1 - q}|x_1 - x_0|.$$

При  $m = \text{const}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^k}{1 - q}(1 - q^m)|x_1 - x_0| = 0$

$|x_{n+m} - x_n| \leq \varepsilon$  и  $\{x_n\}$  — последовательность Коши  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \xi$ .

Поскольку дифференцируемая функция непрерывна,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \xi = \tilde{x}$  корень уравнения  $x = d(x)$ .

Необходимо выполнение условия — малость по модулю производной.

#### 5.4.3. Метод касательных

Данный метод заложен в блоке *Given-Find*. Его суть заключается в следующем. Пусть  $y = f(x)$  имеет корень на отрезке  $[a, b]$ . Задается приближение корня  $x = x_0$ , находится значение функции  $y = f(x_0)$ , через эту точку проводится касательная, которая пересекает ось  $OX$  в точке  $x_1$ , снова вычисляется  $y = f(x_1)$ , через эту точку проводится касательная и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, можно построить последовательность  $\{x_n\}$ , сходящуюся к искомому корню  $x$ .

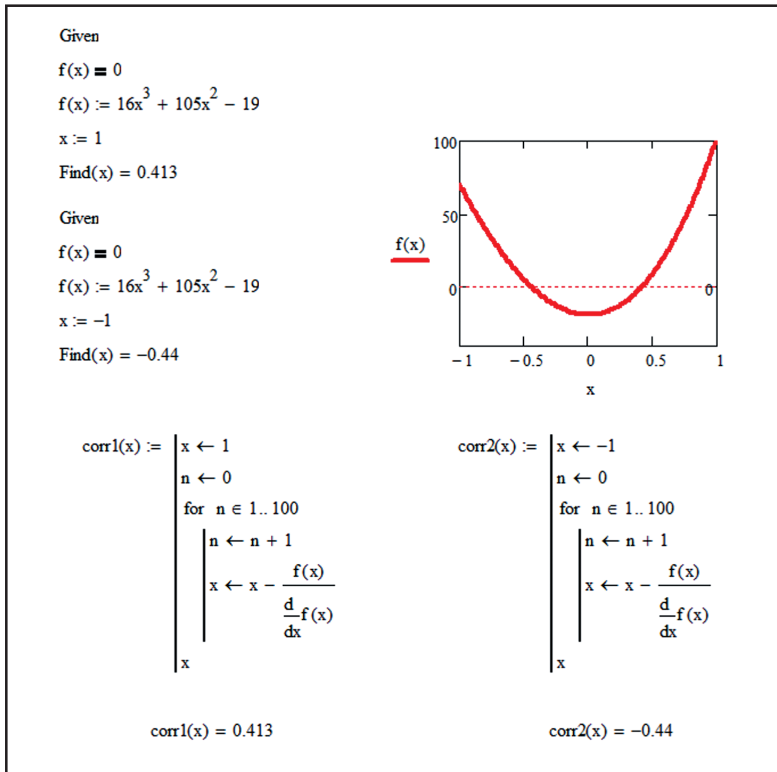
Тогда  $x_{n+1}$  легко выразить через рекуррентную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Для того чтобы реализовать данный метод, для решения уравнения необходимо обратиться к блоку *Given-Find*. После ключевого слова *Given* записывается уравнение, которое необходимо решить, приравнивается к нулю с помощью логического знака равенства, задается локализация корня. После этого обращение к *Find(x)* возвращает значение корня вблизи заданной локализации.

Данный алгоритм можно заложить вручную, используя элементы программирования. На листинге (с. 75) приводится пример работы подпрограмм *corr1(x)* и *corr2(x)*. Для создания подпрограммы-функции необходимо использовать *Add line* на панели инструментов «Программирование». Подпрограммы отличаются только начальным приближением корня. Начальному значению корня присваивается определенное значение (в примере  $x = 1$ ,  $x = -1$ ). Счетчику  $n$  присваивают нулевое значение, вычисление последовательности, сходящейся к искомому корню, осуществляется в цикле «for». Для достижения высокой точности необходимо проводить как можно больше итераций. В примерах  $n = 1000$  шагов. В цикле вычисляется последующее значение корня через предыдущее и происходит перескок счетчика на единицу. Результат работы подпрограмм  $x_1 = 0,413$ ,  $x_2 = -0,44$ . — тысячные элементы  $x_{1000}$  сходящихся последовательностей.





Метод касательных решения уравнения  $16x^3 + 105x^2 - 19 = 0$

#### 5.4.4. Метод хорд

Следующий численный метод решения уравнений — **метод хорд**. Алгоритм его следующий. Пусть  $y = f(x)$  имеет корень на отрезке  $[a, b]$ . Задается приближение корня  $x = x_0$ , находится значение функций  $y_b = f(b)$ ,  $y = f(x_0)$ , через точки  $(b, y_b)$  и  $(x_0, y)$  проводится хорда, которая пересекает ось  $OX$  в точке  $x_1$ , вычисляется  $y = f(x_1)$ , через точки  $(b, y_b)$  и  $(x_1, y)$  проводится хорда, которая пересекает ось  $OX$  в точке  $x_2$  и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, можно построить последовательность  $\{x_n\}$ , сходящуюся к искомому корню  $x$ . Тогда  $x_{n+1}$  легко выразить через рекуррентную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

Метод хорд реализуется в MathCad через функцию *root*, которую можно использовать двумя способами: предварительно задав лока-

лизацию корня либо задав интервал локализации корня. Этот метод, что и метод половинного деления, является методом дихотомии, т. е. основан на делении отрезков.

Описанный выше алгоритм метода хорд можно заложить вручную, используя элементы программирования. На листинге с. 76 приводится пример работы подпрограмм `hord1 (x)` и `hord2 (x)` для решения уравнения  $16x^3 + 105x^2 - 19 = 0$ . Подпрограммы отличаются только начальным приближением корня. Начальному приближению корня присваивается определенное значение (в примере  $x = 1, x = -1$ ). Счетчику  $n$  присваивают нулевое значение, вычисление последовательности сходящейся к искомому корню осуществляется в цикле «for». В примерах  $n = 100$  шагов. В цикле вычисляется последующее значение корня через предыдущее и происходит перескок счетчика на единицу. Результат работы подпрограмм  $x_1 = 0,413, x_2 = -0,44$  — тысячные элементы  $x_{1000}$  сходящихся последовательностей. При этом можно задать начальное приближение корня либо интервал его локализации.

$f(x) = 0$ $f(x) := 16x^3 + 105x^2 - 19$	
Задано начальное приближение корня	Задан интервал локализации корня
$x := 1$	
$\text{root}(f(x), x) = 0.413$	$\text{root}(f(x), x, 0, 1) = 0.413$
$x := -1$	
$\text{root}(f(x), x) = -0.44$	$\text{root}(f(x), x, -2, -0.05) = -0.44$
Задана подпрограмма	
$a1 := -3$	$b2 := 6$
$\text{hord1}(x) := \begin{array}{l} x \leftarrow -1 \\ n \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1 \dots 100 \\ \quad \begin{array}{l} n \leftarrow n + 1 \\ x \leftarrow x - \frac{(a1 - x) \cdot f(x)}{f(a1) - f(x)} \end{array} \\ x \end{array}$	$\text{hord2}(x) := \begin{array}{l} x \leftarrow 1 \\ n \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1 \dots 100 \\ \quad \begin{array}{l} n \leftarrow n + 1 \\ x \leftarrow x - \frac{(b2 - x) \cdot f(x)}{f(b2) - f(x)} \end{array} \\ x \end{array}$
$\text{hord1}(x) = -0.44$	$\text{hord2}(x) = 0.413$

Метод хорд решения уравнений

#### 5.4.5. Разбиение на сегменты

В том случае, если уравнение имеет множество корней, удобно проводить **разбиение на сегменты** и на каждом сегменте находить корень методом хорд.

Например, чтобы решить уравнение  $\frac{\sin(x)}{x} = 0$  на отрезке  $[-10\pi + 0, 2, 0]$ , напомним подпрограмму  $FF$  (рис. 77), которая возвращает корень на заданном отрезке. Столбец  $X$  задает границы интервалов локализации корня. В результате вычислений получено 10 корней  $FF(x)$ . Значения, выведенные в столбец  $G(FF(X))$ , порядка  $10^{-12}$ ,  $10^{-13}$ , что говорит о том, что значение функции  $y = g(X)$  от найденных численным методом корней стремится к нулю. Уравнение  $\frac{\sin(x)}{x} = 0$  равносильно системе уравнений  $\begin{cases} \sin(x) = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$  Решения уравнения  $\frac{\sin(x)}{x} = 0$  на отрезке  $[-10\pi + 0, 2, 0]$  удовлетворяют  $x = \pi k, k = -1, \dots, -10$ .

$FF(X0) := \begin{cases} X \leftarrow X0 \\ \text{return } \text{root}(g(X), X) \end{cases}$		
$FF(-3) = -3.142 \quad FF(4) = 3.142$		
$X := (-10\pi + 0.1), (-9\pi + 0.1) \dots 0$		
$X =$	$FF(X) =$	$g(FF(X)) =$
-31.316	-31.416	0
-28.174	-28.274	$5.065 \cdot 10^{-15}$
-25.033	-25.133	$-2.096 \cdot 10^{-14}$
-21.891	-21.991	$8.114 \cdot 10^{-14}$
-18.75	-18.85	$-3.165 \cdot 10^{-13}$
-15.608	-15.708	$1.33 \cdot 10^{-12}$
-12.466	-12.566	$-6.537 \cdot 10^{-12}$
-9.325	-9.425	$4.275 \cdot 10^{-11}$
-6.183	-6.283	$-1.311 \cdot 10^{-15}$
-3.042	-3.142	$5.981 \cdot 10^{-13}$

Разбиение на сегменты для решения уравнения  $y = \frac{\sin x}{x}$ .

Столбец  $X$  — корни уравнения на отрезке

### 5.5. Приближенные методы при использовании разложения в ряд

---

Рядом Тейлора для бесконечно дифференцируемой в точке  $a$  функции  $f(x)$  называют ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ . При  $a=0$  (разложение в окрестности нуля) ряд приводится к виду  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  и называется рядом Маклорена.

Для того чтобы в MathCad разложить функцию в ряд Маклорена, существует два способа:

#### *Способ 1*

*Задать функцию, которую необходимо разложить в ряд.*

*На панели инструментов «Символьные» нажать «Series» (разложить в ряд), в файле после функции появится «series», поставить запятую, ввести требуемую максимальную степень.*

*Щелкнуть мышью по пустому полю файла.*

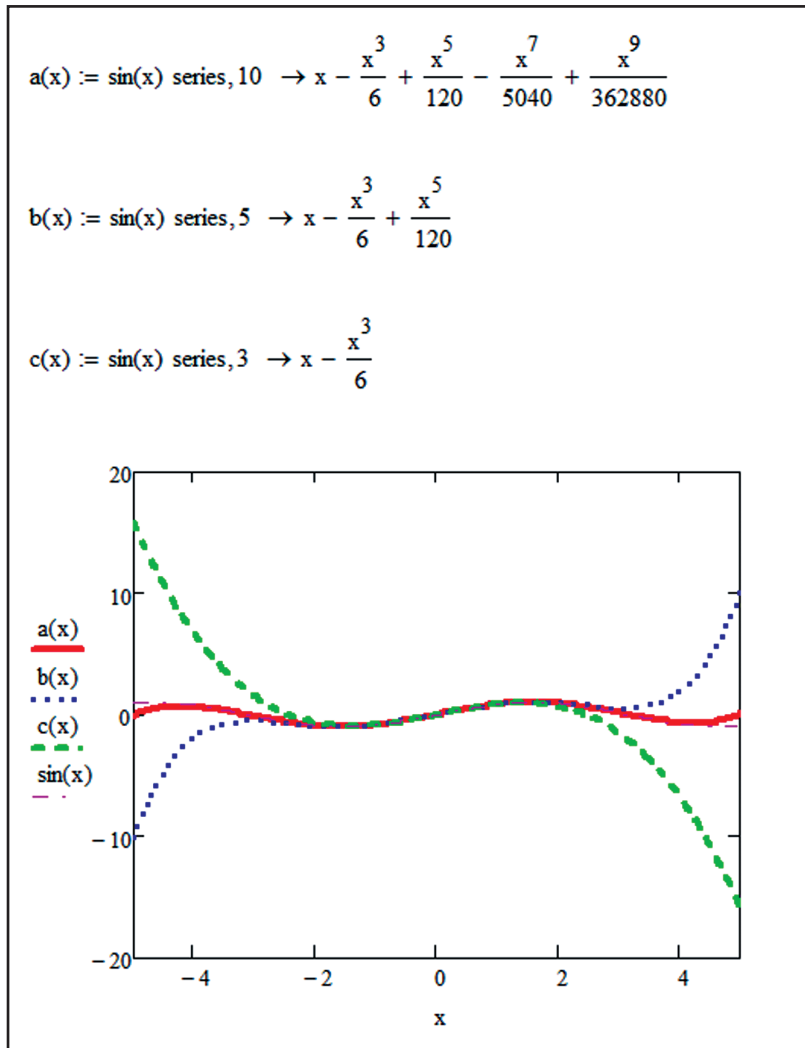
#### *Способ 2*

*Задать функцию, которую необходимо разложить в ряд.*

*Выделить мышью переменную функции, на вкладке меню найти «Символьные операции», выбрать «переменная», затем «разложить в ряд», в открывшемся окне задать порядок приближения (максимальную степень при  $x$ ).*

*Строкой ниже появится разложение.*

На примере разложения  $y = \sin(x)$  при разных порядках покажем аппроксимацию синуса полиномами 9, 5, 3 степеней. Из разложения функции  $y = \sin(x)$  в окрестности нуля видно, что чем больше порядок, тем точнее приближение. Такое разложение позволяет выполнить аппроксимацию функции полиномами  $n$ -го порядка.

Разложение функции  $y = \sin x$  в окрестности нуля

## 5.6. Алгоритм вычисления числа $e$

Аппроксимация функций полиномами в окрестности точки позволяет приближенно вычислять значение этой функции в точке как сумму полиномов. Так можно определить значение иррационального числа  $e$ .

В курсе математического анализа иррациональное число  $e$  вводится как  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Это число называется также неперовым числом, по имени шотландского математика Д. Непера.

Покажем, что последовательность  $\{e_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  является монотонно возрастающей ограниченной последовательностью. Согласно биному Ньютона

$$\begin{aligned} \exp(n) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(n+1) &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Можно сделать вывод:  $\exp(n+1) > \exp(n)$ ,  $2 < \exp(n) < 3$ . Следовательно, последовательность является монотонной и ограниченной, значит имеет предел. Число  $e$  является пределом такой последовательности, вычислим его численным методом.

Из теории рядов известно, что

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Тогда число  $e$  представимо в виде бесконечной суммы ряда

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Непосредственно суммируя первые  $n$  членов данного ряда, можно получить значения иррационального числа  $e$  с заданной точностью. Организуем подпрограмму, которая производит данное суммирование.

В рассматриваемом примере задается точность вычисления  $10^{-20}$ . Алгоритм позволяет суммировать члены ряда при условии, что каждый из них больше указанной погрешности. Как только находится элемент, меньший указанной погрешности, происходит выход из цикла while и выводится результат вычислений. Для того чтобы результат был выведен с точностью  $10^{-20}$ , необходимо использовать функцию float (расчет с плавающей точкой) с параметром 21.

```

funkcia(x) := ex      a := 1
pogr := 10-20

                                ea float, 21 → 2.71828182845904523536

razl(x) := | n ← 0
            | fd(x) ← funkcia(0)
            | y ← 0
            | while fd(0) > pogr
            |   | fd(x) ←  $\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \text{funkcia}(x)$ 
            |   | y ← y + fd(0) · xn
            |   | n ← n + 1
            |   | y
            |
razl(a) float, 21 → 2.71828182845904523536

```

Подпрограмма для вычисления значения числа  $e$  с точностью  $10^{-20}$

Также число  $e$  можно найти как предел 
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

## 5.7. Приближенные вычисления с использованием дифференциалов

Эти вычисления основаны на приближенной замене приращения функции в точке на ее дифференциал  $\Delta y \approx dy$ . Погрешность от такой замены при  $\Delta x \rightarrow 0$

является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с  $\Delta x$ .

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy \approx f(x_0) + f'(x_0)dx \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Эта формула называется **формулой линеаризации** и является основной в приближенных вычислениях.

Вычислим приближенно значения  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 0,1\right)$  и  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0,1\right)$ :

$$\begin{aligned} x &:= \frac{\pi}{4} & \Delta x &:= -0.1 \\ f(x) &:= \sin(x) \\ f &:= f(x) + \frac{d}{dx}f(x) \cdot \Delta x \text{ float, 1} \rightarrow 0.6 \\ f(x) &:= \cos(x) \\ f &:= f(x) + \frac{d}{dx}f(x) \cdot \Delta x \text{ float, 1} \rightarrow 0.8 \end{aligned}$$

Приближенные вычисления при помощи дифференциалов

Таким образом,  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 0,1\right) \approx 0,6$  и  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0,1\right) \approx 0,8$ .

## 5.8. Решение систем линейных уравнений

### 5.8.1. Решение определенных систем линейных уравнений

$$\text{Система} \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} = b_{11}, \\ \dots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn} = b_{mn}. \end{cases}$$

может иметь одно решение, бесконечное множество, либо не иметь решений. Для того чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы  $\Delta \neq 0$ .



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

В противном случае, когда  $\Delta=0$ , система имеет либо бесконечное множество решений, либо не имеет решений. Система однородна, если столбец свободных членов нулевой. Неоднородна, если хотя бы один элемент столбца свободных членов отличен от нуля.

Система линейных уравнений называется совместной, если имеет решения, и несовместной — в противном случае. Система называется определенной, если решение есть, притом единственное, и неопределенной, если решений — бесконечное множество. На практике часто используют метод элементарных преобразований (метод Гаусса), матричный метод и метод Крамера. Притом два последних применяются только в случае  $\Delta \neq 0$ . Реализуем каждый из методов в среде MathCad.

Пусть необходимо решить систему неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16, \\ 3x_1 - 1x_2 - 4x_3 = -15, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -23. \end{cases}$$

По методу Крамера:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ ,

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 2 \\ -15 & -1 & -4 \\ -23 & -2 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 2 \\ 3 & -15 & -4 \\ 1 & -23 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 3 & -1 & -15 \\ 1 & -2 & -23 \end{vmatrix}.$$

Функция `submatrix (A, ir, jr, ic, jc)` возвращает подматрицу массива  $A$ , состоящую из элементов строк от  $ir$  до  $jr$  и столбцов от  $ic$  до  $jc$  массива  $A$ . Функция `augment (A, B, C, ...)` возвращает массив, полученный в результате размещения  $A, B, C, \dots$  слева направо.

$$\begin{aligned}
A &:= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} & B &:= \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \\ -23 \end{pmatrix} & A1 &:= \text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
A2 &:= \text{submatrix}(A, 0, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} & A3 &:= \text{submatrix}(A, 0, 2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \\
BA2A3 &:= \text{augment}(B, A2, A3) = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 \\ -15 & -1 & -4 \\ -23 & -2 & -5 \end{pmatrix} & A1BA3 &:= \text{augment}(A1, B, A3) = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 2 \\ 3 & -15 & -4 \\ 1 & -23 & -5 \end{pmatrix} \\
A1A2B &:= \text{augment}(A1, A2, B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 3 & -1 & -15 \\ 1 & -2 & -23 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &:= (|A|)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} |BA2A3| \\ |A1BA3| \\ |A1A2B| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Метод Крамера решения системы определенных  
линейных уравнений

Матрица  $A$  — основная матрица системы,  $B$  — столбец свободных членов.  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  — матрицы, полученные замещением соответствующей строки основной матрицы на столбец свободных членов. Отношение определителей к главному определителю, то есть неизвестные, выводятся в примере в матричном виде (матрица-столбец неизвестных). Решением системы является точка  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ , т. е.  $X = (1 \ 2 \ 4)^T$ .

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) заключается в последовательном преобразовании расширенной матрицы системы сначала к треугольному виду, затем — к диагональному.

Метод элементарных преобразований	
Основная матрица системы	Столбец свободных членов
$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$	$B := \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \\ -23 \end{pmatrix}$
Расширенная матрица системы	
$AB := \text{augment}(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 16 \\ 3 & -1 & -4 & -15 \\ 1 & -2 & -5 & -23 \end{pmatrix}$	
Диагональная матрица	Единственное решение
$AB1 := \text{rref}(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\text{submatrix}(AB1, 0, 2, 3, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

## Решения систем линейных уравнений

Функция  $\text{rref}(A)$  возвращает матрицу, представляющую приведенно-ступенчатую форму по строкам для  $A$ .

Решением системы является точка  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ , т. е.  
 $X = (1 \ 2 \ 4)^T$ .

И, наконец, решим исходную систему третьим способом — матричным.

$$AX = B, A^{-1}AX = A^{-1}B, X = A^{-1}B.$$

Функция  $\text{lsolve}(M, V)$  возвращает вектор  $X$ , дающий решение линейной системы уравнений  $M \cdot X = V$ .

MathCad позволяет решить линейную систему неоднородных уравнений, задав ее в блоке *Given-Find*:

$$\begin{array}{lcl}
 A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} & B := \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \\ -23 \end{pmatrix} & x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \\
 & & \text{Given} \\
 & & 2x + 3y + 2z - 16 = 0 \\
 & & 3x - y - 4z + 15 = 0 \\
 & & x - 2y - 5z + 23 = 0 \\
 A \cdot X = B & X := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} & w := \text{Find}(x, y, z) \\
 \text{Isolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} & & w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений  
и использование блока *Given-Find* для решения систем уравнений

### 5.8.2. Решение неопределенных систем линейных уравнений

Необходимо решить однородную систему  $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0, \\ 3x - y - 4z = 0, \end{cases} \Delta = 0.$

Для этого ввести после *Given* систему уравнений, используя знак логического равенства (на панели инструментов *Булева алгебра*).

Функция *Find* (var1, var2, ...) возвращает значения переменных var1, var2, ..., представляющие решение системы уравнений в блоке решения. Если указан только один аргумент, возвращает скаляр, иначе — вектор решений.

В примере  $ww := \text{Find}(x, y, z)$  — возвращает вектор частных решений системы. Для нахождения общего решения необходимо вектор *ww* умножить на константу *c*.

В качестве проверки решения вычисляется  $AX = 0$ , то есть произведение основной матрицы системы и матрицы-столбца общего решения системы.

Теперь решим однородную систему  $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 16, \\ 3x - y - 4z = -15, \end{cases} \Delta = 0.$

Частное решение находится так же, как частное решение однородной системы в предыдущем примере.

Given

$$2x + 3y + 2z = 0$$

$$3x - y - 4z = 0$$

ww := Find(x,y,z)

Частное решение однородной системы

$$ww = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 1 \\ -\frac{11}{14} \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы

$$ww \cdot c = c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 1 \\ -\frac{11}{14} \end{pmatrix}$$

AB = 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 1 \\ -\frac{11}{14} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нахождение решений неопределенной однородной системы  
линейных уравнений

Для того чтобы разложить общее решение неоднородной системы по фундаментальной системе решений найдем сумму частного и общего решения неоднородной системы.

Разложение по фундаментальной системе решений

Given

$$2x + 3y + 2z - 16 = 0$$

$$3x - y - 4z + 15 = 0$$

w := Find(x,y,z)

Частное решение неоднородной системы

$$w = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ 1 \\ \frac{67}{14} \end{pmatrix}$$

Общее решение неоднородной системы

$$w1 = c \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ 1 \\ \frac{67}{14} \end{pmatrix}$$

AB = C

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ 1 \\ \frac{67}{14} \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 1 \\ -\frac{11}{14} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{12}{7} - \frac{5 \cdot c}{7} \\ c + 1 \\ \frac{67}{14} - \frac{11 \cdot c}{14} \end{pmatrix}$$

AB = C

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot c \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ 1 \\ \frac{67}{14} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 \cdot c \\ -15 \cdot c \end{pmatrix}$$

AB = C

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{7} - \frac{5 \cdot c}{7} \\ c + 1 \\ \frac{67}{14} - \frac{11 \cdot c}{14} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Нахождение решений неопределенной  
неоднородной системы линейных уравнений

### 5.9. Разложение иррациональностей в цепные дроби

Цепной дробью  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  называется дробь, которую можно представить в виде

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}},$$

где  $a_0$  — целое число, а все остальные  $a_n$  — натуральные числа. При этом числа  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  называются неполными частными цепной дроби.

Любое действительное число может быть представлено в виде конечной (для рациональных чисел) или бесконечной (для иррациональных чисел) цепной дроби. Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально.

Для цепной дроби  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$   $N$ -й подходящей дробью называется конечная цепная дробь  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ , значение которой рационально и равно  $\frac{p_n}{q_n}$ .

Эффективным алгоритмом для разложения числа  $x$  в цепную дробь является алгоритм Евклида, в котором  $a_0 = [x]$ ,  $x_0 = x - a_0$ ,  $a_1 = \left[ \frac{1}{x_0} \right]$ ,  $x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1$ ,  $a_n = \left[ \frac{1}{x_{n-1}} \right]$ ,  $x_n = \frac{1}{x_{n-1}} - a_n$ . Разложение в конечные

цепные дроби можно проводить и вручную, однако разложение в бесконечные требует вычислительных ресурсов. Вышеупомянутый алгоритм Евклида просто реализовать в MathCad. Рассмотрим его на примере разложения  $x = \sqrt{2}$ . При этом ограничимся 12 первыми неполными частными ( $k = 12$ ). Из расчета видно, что  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ . Для  $k = 12$  запишем подходящую дробь, которая является конечной дробью  $[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ , тогда

$$\sqrt{2} \approx \frac{19601}{13860}.$$

```

a := √2
k := 12
Нахождение первых 12 неполных частных
n_ch := | d ← a
        | for i ∈ 1..k
        |   | Di ← trunc(d)
        |   | d ← ( 1 / (d - trunc(d)) )
        | D

n_chT → (1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2)

Подходящая дробь:
P_d := | b ← n_chk
        | for i ∈ k - 1..1
        |   b ← n_chi + 1/b
        | b
        P_d → 19601 / 13860
    
```

Подпрограмма для разложения иррациональностей в цепные дроби и нахождения подходящей дроби, использующая алгоритм Евклида

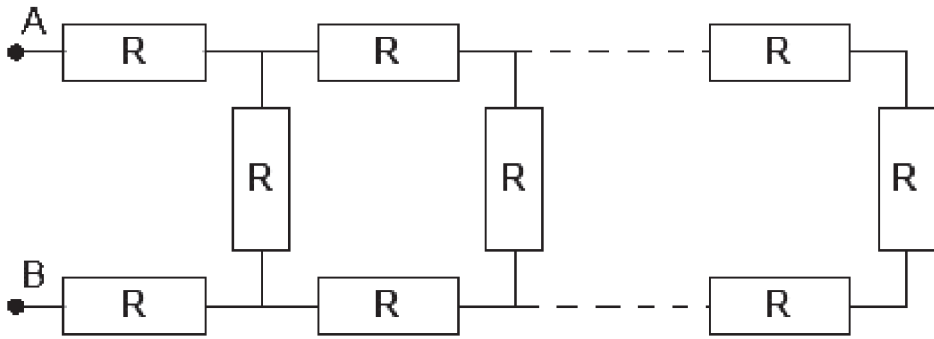
Покажем, что разложение  $x = \sqrt{2}$  в цепную дробь верное:

$$x = 1 + \frac{1}{1+x},$$

$$x^2 = 2, x = \pm\sqrt{2}.$$

Данные разложения имеют множества приложений, а также позволяют приближать иррациональности рациональными дробями.

Бесконечные дроби могут встречаться в физике при вычислении сопротивления бесконечной электрической цепи. Например, необходимо определить сопротивление электрической цепи:



Бесконечная цепь из резисторов, каждый сопротивлением  $R$

Сопротивление  $R_\Sigma$  можно записать в виде бесконечной цепной дроби

$$R_\Sigma = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \dots}}}}$$

$$R_\Sigma = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_\Sigma}}, R_\Sigma > 0, R_\Sigma^2 - 2RR_\Sigma - 2R^2 = 0, R_\Sigma = R(\sqrt{3} + 1).$$

При этом сопротивление бесконечной цепи выражается иррациональным числом.

Мы упоминали число  $e$  как основание натуральных логарифмов в текущей главе.

Впервые разложение основания натуральных логарифмов было осуществлено Леонардом Эйлером:

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}, e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$



Если применить алгоритм Евклида в MathCad для разложения числа  $e$  (рис. 46), то 12 неполных частных будут (2 1 2 1 1 4 1 1 6 1 1 8). А подходящая дробь —  $e = \frac{23225}{8544}$ .

$$\begin{array}{l}
 a := e \quad k := 12 \\
 \\
 e\_ := \left\{ \begin{array}{l} d \leftarrow a \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} D_i \leftarrow \text{trunc}(d) \\ d \leftarrow \left( \frac{1}{d - \text{trunc}(d)} \right) \end{array} \right. \\ D \end{array} \right. \\
 \\
 e\_^T \rightarrow (2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 6 \ 1 \ 1 \ 8) \\
 \\
 Pe\_ := \left\{ \begin{array}{l} b \leftarrow e_{-k} \\ \text{for } i \in k - 1..1 \\ \quad b \leftarrow e_{-i} + \frac{1}{b} \\ b \end{array} \right. \quad Pe\_ \rightarrow \frac{23225}{8544}
 \end{array}$$

Разложение основания натуральных логарифмов в цепную дробь

---

## 6. Стохастические методы.

### Метод Монте-Карло

---

**М**етод Монте-Карло — стохастический метод (от греч. «умеющий отгадывать»), связанный со случайностями (в отличие от детерминированных методов), который позволяет решать математические задачи с помощью моделирования случайных величин. В этом случае необходимо использование генератора случайных чисел, осуществление правильной работы которого значительно упростилось с развитием вычислительной техники. В том случае, когда задача не связана с вероятностными процессами, вероятностные модели вводятся искусственно. Минусом метода является величина погрешности вычислений, которая составляет  $\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ , что значительно выше погрешности для детерминированных методов.

#### 6.1. Генератор случайных чисел

---

Напомним, что случайные числа — это числа, которые почти независимы друг от друга и подчиняются заданному распределению. В Mathcad возможно генерировать случайные числа, имеющие разные законы распределения.

*rbeta ( $m, s_1, s_2$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих бэта-распределение.  $s_1, s_2 > 0$  есть параметры формы.*

*rbinom* ( $m, n, p$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих биномиальное распределение.  $0 \leq p \leq 1$ .  $n$  есть натуральное число.

*rcauchy* ( $m, l, s$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих распределение Коши.  $s > 0$  есть параметр масштаба.  $l$  — параметр расположения.

*rchisq* ( $m, d$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих распределение хи-квадрат.  $d > 0$  есть число степеней свободы.

*rexr* ( $m, r$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих экспоненциальное распределение.  $r > 0$  — параметр распределения.

*rF* ( $m, d_1, d_2$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих  $F$ -распределение.  $d_1, d_2 > 0$  есть числа степеней свободы.

*rgamma* ( $m, s$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих гамма-распределение,  $s > 0$  есть параметр формы.

*rgeom* ( $m, p$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих геометрическое распределение.  $0 < p \leq 1$ .

*rlnorm* ( $m, t, s$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих логнормальное распределение, в котором  $t$  является натуральным логарифмом среднего значения, а  $s > 0$  есть натуральный логарифм среднеквадратичного отклонения.

*rlogis* ( $m, l, s$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих логистическое распределение, в котором  $l$  является параметром расположения, а  $s > 0$  есть параметр масштаба.

*rnbinom* ( $m, n, p$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих отрицательное биномиальное распределение.  $0 < p \leq 1$ .  $n$  есть натуральное число.

*rnorm* ( $m, t, s$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих нормальное распределение.  $s > 0$ .

*rpois* ( $m, l$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих распределение Пуассона.  $l > 0$ .

*rt* ( $m, d$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих  $t$ -распределение Стьюдента.  $d > 0$ .

*runif* ( $m, a, b$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих равномерное распределение, в котором  $b$  и  $a$  являются граничными точками интервала.  $a < b$ .

*rnd* ( $x$ ) возвращает равномерно распределенное случайное число между 0 и  $x$ . Эквивалент *runif* ( $1, 0, x$ ).

*rweibull* ( $m, s$ ) возвращает вектор  $m$  случайных чисел, имеющих распределение Вейбулла, в котором  $s > 0$  является параметром формы.

## 6.2. Вычисление площади треугольника в декартовой системе координат

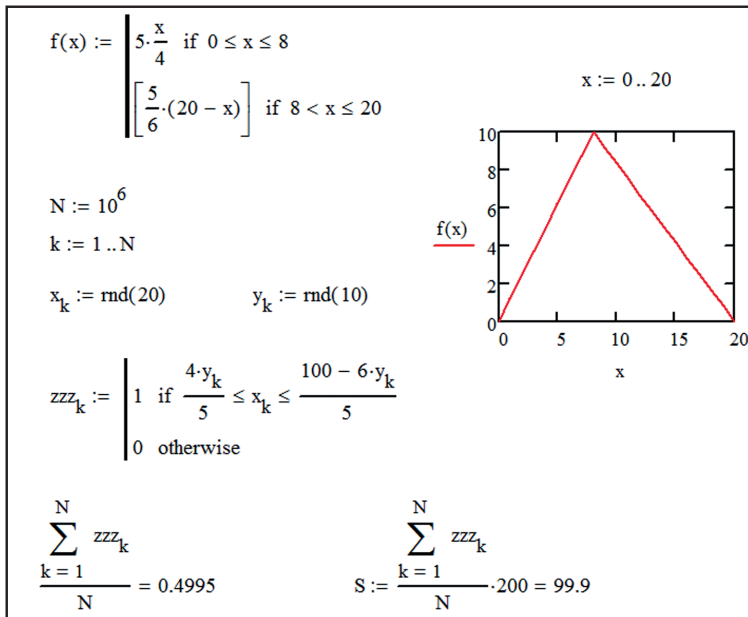
Яркий пример введения случайного процесса для расчета величины, с таким процессом не связанной, — вычисление площади фигуры, ограниченной заданными прямыми и (или) кривыми.

Пусть задана функция: 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq 8, \\ \frac{5}{6}(20 - x) & \text{при } 8 < x \leq 20. \end{cases}$$

Необходимо вычислить площадь треугольника, ограниченного прямыми, заданными функцией  $f(x)$  и осью  $OX$ .

Чтоб найти площадь методом Монте-Карло необходимо организовать стохастический процесс. Треугольник, площадь которого необходимо вычислить, вписан в прямоугольник с длинами сторон  $x = 20$ ,  $y = 10$ .

Рассматриваемую кусочно-линейную функцию  $f(x)$  задаем при помощи *Add line* на панели инструментов *Программирование*. Примем за  $N$  — число генераций случайной величины, в нашем примере — это  $10^6$  раз. Создаем массивы  $x_k$  и  $y_k$  из  $N$  случайных величин с помощью функции  $rnd(m)$ , которая генерирует случайную величину на отрезке  $[0, m]$ , распределенную по равномерному закону.



Определение площади методом Монте-Карло

Массив  $zzz_k$  содержит только нули и единицы. Заполнение числами этого массива происходит посредством проверки условий попадания случайной величины внутрь фигуры (треугольника), очерченной графиком функции  $f(x)$  и осью абсцисс  $OX$ . Если условие выполнено, то для данного значения  $k$  элемент массива заполняется единицей, если условие не выполнено — нулем. Сумма  $\sum_{k=1}^N zzz_k$  показывает чис-

ло случайных чисел, попавших внутрь фигуры. Доля чисел  $\frac{\sum_{k=1}^N zzz_k}{N}$ ,

попавших внутрь треугольника, будет соответствовать площади треугольника  $S$  как доле от площади прямоугольника  $S_{\text{треуг}} = \frac{\sum_{k=1}^N zzz_k}{N} \cdot S_{\text{пряг}}$ .

В итоге  $S_{\text{треуг}} = 99,9$  кв.ед. Рассчитывая эту величину аналитически, имеем  $S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 = 100$ . Погрешность вычисления составляет  $\frac{\Delta S}{S} = \frac{|S_{m-k} - S_a|}{S_a} = \frac{0,99}{100} = 0,0099$  (0,99%).

### 6.3. Вычисление площади в полярной системе координат

Необходимо найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$$r(\varphi) = \sqrt{16 \cos^2 \varphi + 6 \sin^2 \varphi}.$$

Аналитически в полярной системе координат площадь  $S$  находится так:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (16 \cos^2 \varphi + 6 \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + 3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 5,5 \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 11\pi \approx 34,56. \end{aligned}$$

Теперь рассчитаем данный интеграл численно.

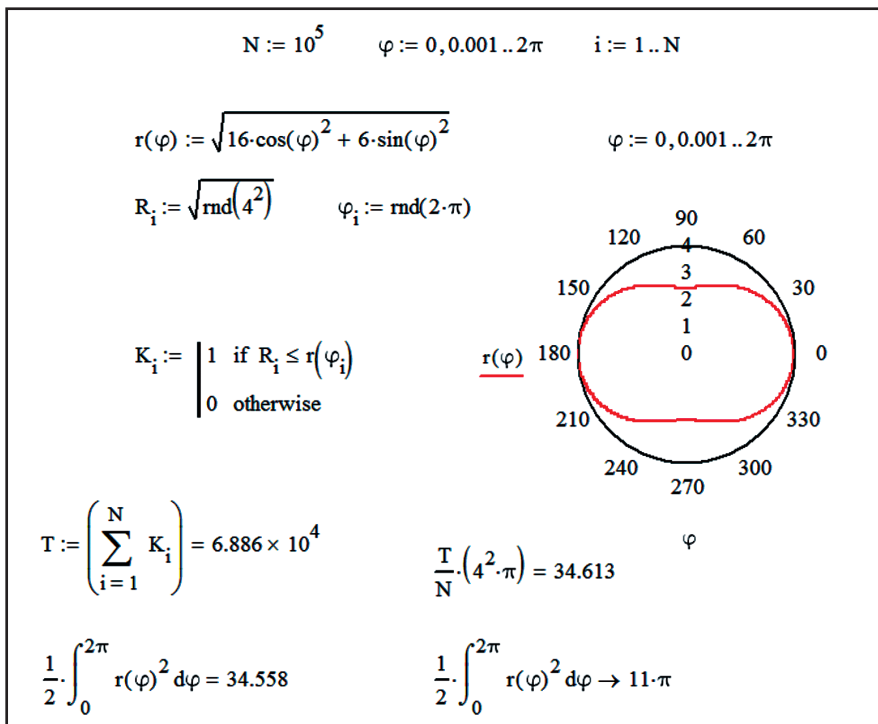
### Первый способ

Организуем процесс генерации случайных чисел.  $N$  — число генераций случайной величины. Теперь создаем массивы  $R_i$  и  $\varphi_i$  из  $N$  случайных величин.  $\varphi_i$  — это массив из случайных величин на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $R_i^2$  — массив из случайных величин на отрезке  $[0, 4^2]$ . Далее вычисление идет аналогично случаю с декартовой системой координат. Площадь круга  $S_{кр} = 16\pi$ .

Данным методом площадь фигуры, ограниченной графиком составляет  $S = 34.613$  кв.ед.

Погрешность вычисления составляет

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{|S_{m-k} - S_a|}{S_a} \cdot 100\% = \frac{34,613 - 11\pi}{11\pi} \cdot 100\% = 0,16\%.$$

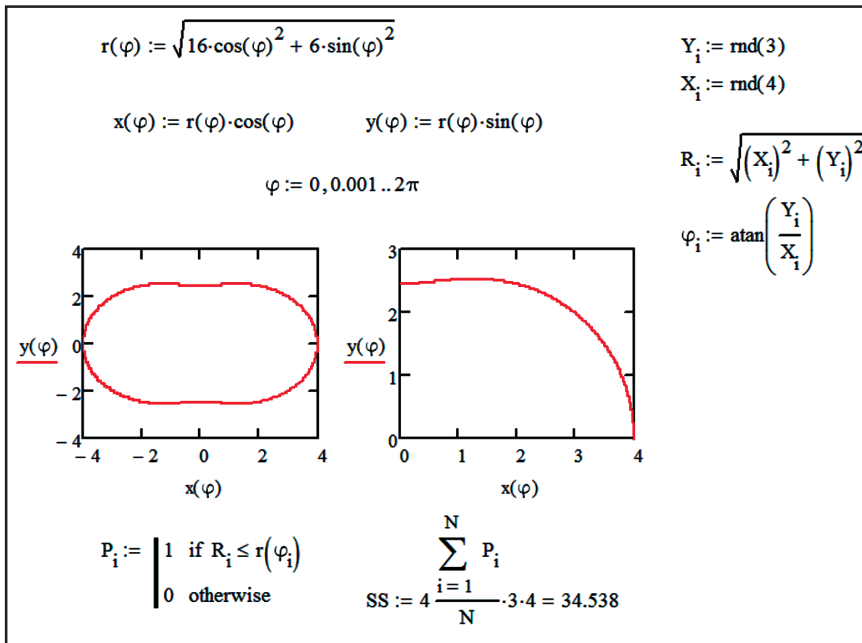


Вычисление площади в полярной системе координат (1 способ)

## Второй способ

Запишем функцию  $r(\varphi) = \sqrt{16\cos^2 \varphi + 6\sin^2 \varphi}$  в декартовой системе координат, используя известное преобразование  $\begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi. \end{cases}$

Создаем массивы  $x_i$  и  $y_i$  из  $N$  случайных величин с помощью функции  $\text{rnd}(4)$ ,  $\text{rnd}(3)$ . Теперь точки случайным образом распределяются по поверхности  $OXY$ .



Вычисление площади в полярной системе координат (2-й способ)

$r(\varphi)$  задает границы области, поэтому условие попадания случайной величины в эти границы будет записываться как  $R_i \leq r(\varphi_i)$ , где

$$R_i = \sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2}. \text{ Искомая площадь } SS = \frac{\sum_{i=1}^N P_i}{N} \cdot 4S_{\text{прямо}} = 34,63. \text{ Погрешность вычисления составляет}$$

нось вычисления составляет

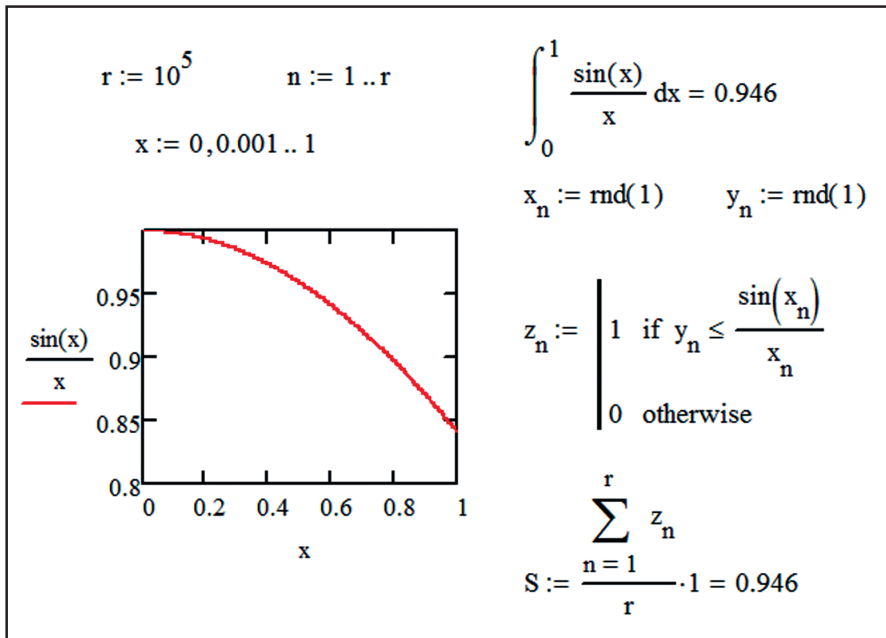
$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{|S_{m-k} - S_a|}{S_a} \cdot 100\% = \frac{|34,538 - 11\pi|}{11\pi} \cdot 100\% = 0,06\%.$$

## 6.4. Вычисление определенных интегралов

Выше мы определяли значение «неберущихся» интегралов численными методами. Сейчас вычислим интеграл  $\text{Si}(1) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  методом

Монте-Карло.

Интеграл понимается здесь как площадь под графиком на отрезке интегрирования. Далее приводится расчет  $\text{Si}(1)$ . Подробных объяснений давать не будем ввиду аналогичности данного расчета нахождению площади в декартовой системе координат.



Вычисление определенных интегралов

## 6.5. Вычисление двойных интегралов

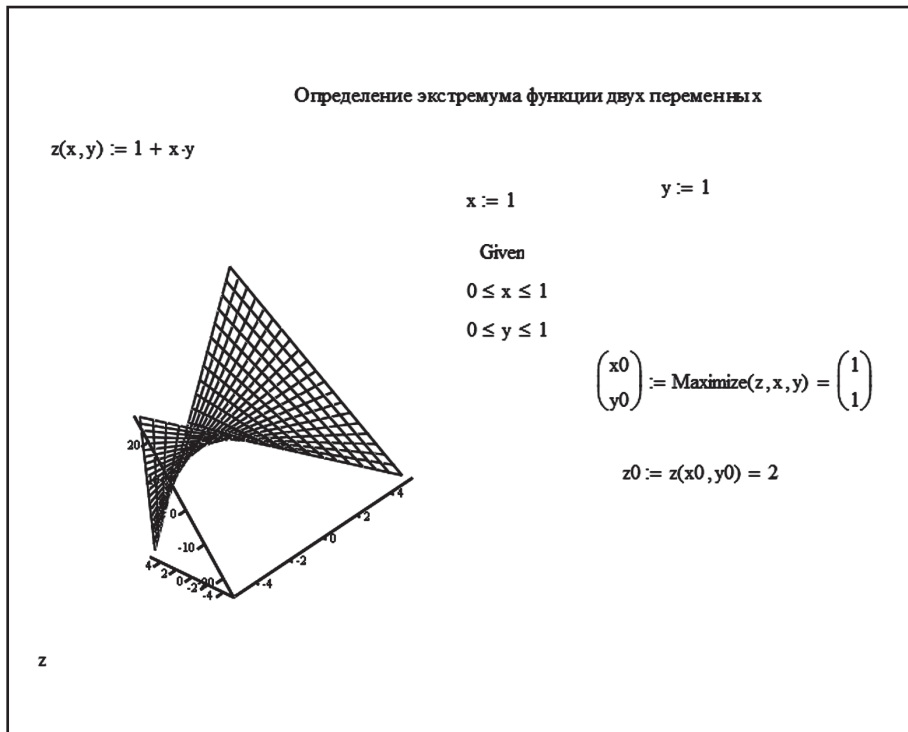
Расчет двойных интегралов методом Монте-Карло отличается от расчета определенных интегралов тем, что генерация случайных чисел в данном случае соответствует точкам трехмерного пространства. Геометрический смысл двойного интеграла суть объем фигуры,



ограниченной графиком подынтегральной функции в пределах интегрирования.

Вычислим  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^x (1 + xy) dy$ .

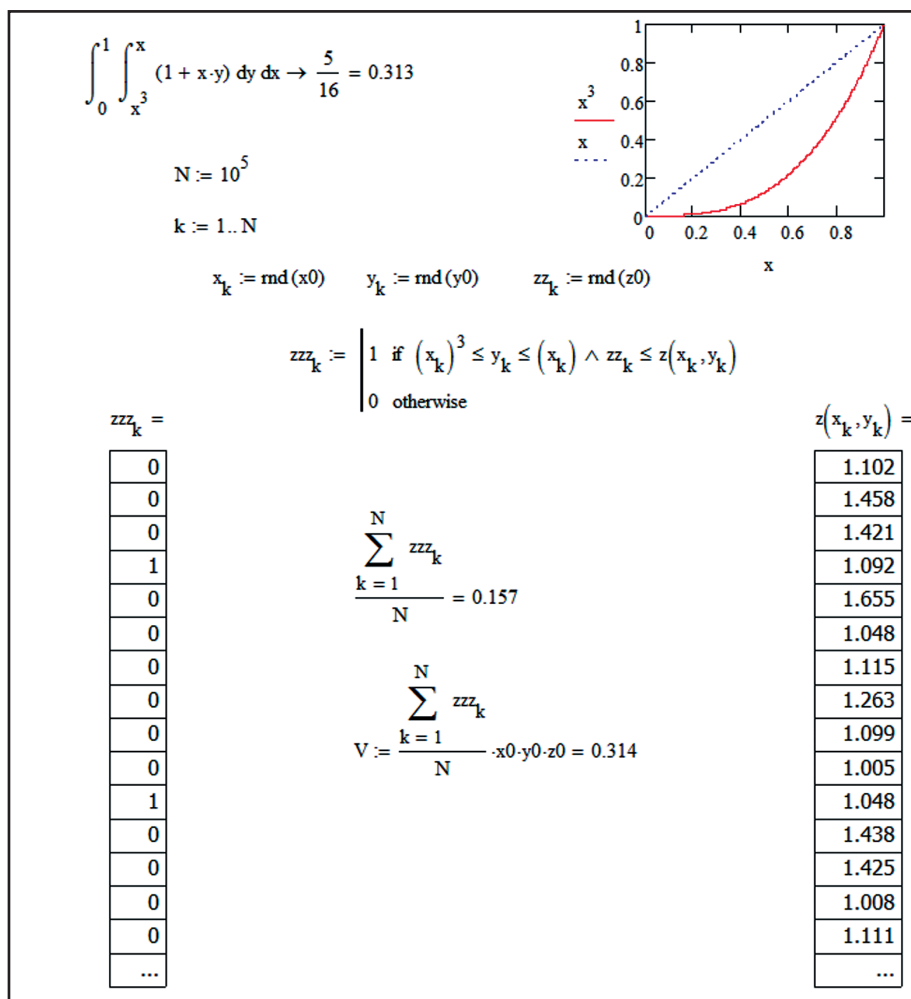
Сначала необходимо определить экстремум функции двух переменных для определения максимального значения  $z$ . Для этого задается приближение  $x = 1, y = 1$  и на отрезках  $x \in [0, 1]$  и  $y \in [0, 1]$ . Встроенная функция  $\text{Maximize}(f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  определяет экстремум функции  $f(x)$ . Координаты точек экстремума выведем как матрицу-столбец:



Определение экстремума функции  $f(x, y) = 1 + xy$

Так, для подынтегральной функции  $f(x, y) = 1 + xy$  точкой экстремума (минимума) на отрезках  $x \in [0, 1]$  и  $y \in [0, 1]$  является  $M(1, 1, 2)$ .

После определения экстремума можно запускать генератор случайных чисел.



Вычисление двойных интегралов методом Монте-Карло

Аналитический расчет дает

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_{x^3}^x (1 + xy) dy &= \int_0^1 dx \left( y + \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{x^3}^x = \\
 &= \int_0^1 \left( x + \frac{x^3}{2} - x^3 - \frac{x^7}{2} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^8}{16} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125.
 \end{aligned}$$

## 6.6. Задача Бюффона

Классическая задача, которая позволила определить значение числа  $\pi$  вероятностным методом. Рассмотрим ее и решим посредством MathCad.

Задача Бюффона: на плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии  $2a$ . На плоскость наудачу брошена игла длины  $2l < 2a$ . Какова вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую?

Заметим, что в формулировке задачи нет вопроса о нахождении числа  $\pi$ . Мало того, о нем вообще не упоминается.

Чтобы игла пересекала прямую, достаточно, чтобы точка ее центра находилась ниже кривой, очерченной синусоидой  $y = l \cdot \sin \varphi$  (см. с. 102).

Используя геометрическое определение вероятности, найдем веро-

$$\text{ятность } P \text{ пересечения иглой прямой } P = \frac{\int_0^\pi l \cdot \sin \varphi d\varphi}{S_{np}} = \frac{2l}{\pi a} = \frac{2}{\pi} = 0.637.$$

Из данной задачи вытекает задача по определению числа  $\pi$ , исходя из результатов экспериментов по бросанию иглы на расчерченную поверхность.

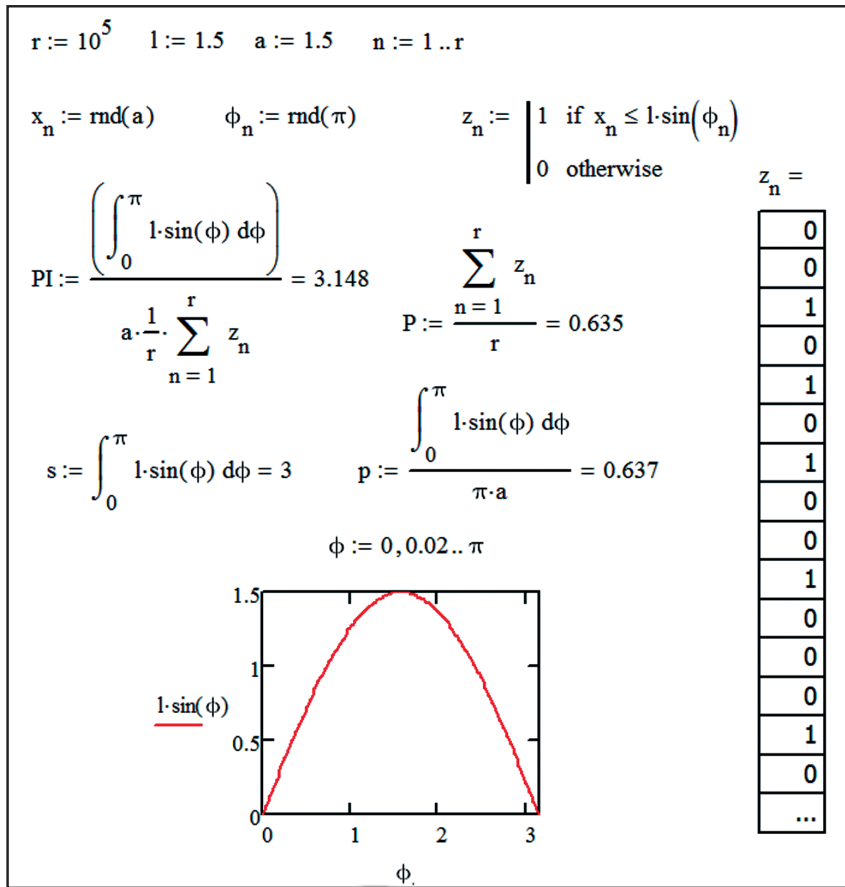
Пусть иглу бросают  $r$  раз, при этом она пересечет прямую  $n$  раз. Поскольку вероятность того, что игла пересечет прямую  $P = \frac{n}{r}$ , можно

оценить число  $\pi$  как  $\pi = \frac{2l \cdot r}{a \cdot n}$ . Данный «эксперимент» нетрудно про-

вести в среде MathCad.

Для организации «бросков иглы» необходимо задействовать генератор случайных чисел, далее происходит отбор по принципу «пересекает-не пересекает», результаты в виде нулей и единиц записываются в массив  $z_n$ , и происходит окончательный расчет значения числа  $\pi$ .

Численный расчет показывает, что искомая вероятность составляет  $P = 0.635$ . Для определения погрешности  $\alpha$  числа  $\pi$  используем понятие отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.



Нахождение числа  $\pi$  при решении задачи Бюффона. Метод Монте-Карло

Вероятность того, что в  $r$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна  $P$ , абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа  $\varepsilon$  и при-

ближенно равна удвоенной функции Лапласа при  $x = \varepsilon \sqrt{\frac{r}{pq}}$ .

$P\left(\left|\frac{m}{r} - p\right| \leq \alpha\right) = 2\Phi\left(\alpha \sqrt{\frac{r}{pq}}\right)$ , где  $p$  — вероятность пересечения иглой

прямой при одном броске,  $p = \frac{2}{\pi}$ ,  $q$  — вероятность непересечения иглой

прямой при одном броске,  $q = 1 - \frac{2}{\pi}$ .

Для решения задачи необходимо использовать встроенную функцию распределения вероятностей  $qnorm(p, m, \sigma)$  для стандартного нормального распределения, которая возвращает обратное нормальное распределение с математическим ожиданием  $m$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ . В расчетах принимаем вероятность равной  $p = 0,475 + 0,5 = 0.975$ , математическое ожидание  $m = 1$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma = 1$ .

$$P\left(\left|\frac{m}{r} - p\right| \leq \alpha\right) = 2\Phi\left(\alpha \cdot \sqrt{\frac{r}{p \cdot q}}\right)$$

$$r := 10^5 \quad P := 0.95 \quad \Phi := \frac{P}{2} \quad p := \frac{2}{\pi} \quad q := 1 - p$$

$$\alpha := \frac{qnorm(0.975, 0, 1)}{\sqrt{\frac{r}{p \cdot q}}} = 2.981 \times 10^{-3}$$

Определение погрешности нахождения значения числа  $\pi$

Так, при  $r = 10^5$  бросков иглы число  $\pi$  оценивается в  $\pi = 3,148$  с точностью  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ .

Отметим, что время, необходимое для проведения эксперимента по вычислению числа  $\pi$  с точностью  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  без использования вычислительных средств, т. е. вручную, составило бы 3,472 суток без перерыва при условии, что на один бросок и каждую запись исхода броска тратится в среднем 3 сек.

В связи с рассмотренной задачей вспомним парадокс, принадлежащий Бертрону (1907 г). Задача заключается в нахождении вероятности того, что длина случайной хорды окружности единичного радиуса превзойдет значение  $\sqrt{3}$ , то есть сторону равностороннего вписанного треугольника. Можно предложить три решения задачи, каждая из которых имеет право на существование.

1-й вариант. Всякая хорда пересекает окружность в двух точках. Пусть обе этих точки равномерно распределены на окружности и их

положения на ней независимы. При этом одна из точек — вершина вписанного равностороннего треугольника.

2-й вариант. Длина хорды зависит от ее расстояния от центра окружности и не зависит от ее направления. Пусть хорда имеет фиксированное направление, перпендикулярное данному диаметру, а точка пересечения хорды с диаметром имеет равномерное распределение на диаметре.

3-й вариант. Каждая хорда однозначно определяется основанием перпендикуляра, опущенного на нее из центра. Эта точка распределена равномерно внутри круга.

Вероятности, соответствующие каждому из вариантов, рассчитаны численно:

$N := 10^6 \quad k := 1..N$	
<b>1 вариант</b>	
$\alpha_k := \text{md}(2\pi) \quad \beta_k := \text{md}(2\pi)$	
$z_k := \begin{cases} 1 & \text{if } \sqrt{2 - 2\cos(\alpha_k - \beta_k)} > \sqrt{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
$\frac{\sum_{k=1}^N z_k}{N} = 0.334$	
<b>2 вариант</b>	<b>3 вариант</b>
$x_k := \text{md}(2)$	$x_k := \text{md}(1)$
$zz_k := \begin{cases} 1 & \text{if }  x_k - 1  < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$y_k := \text{md}(1)$
$\frac{\sum_{k=1}^N zz_k}{N} = 0.5$	$zzz_k := \begin{cases} 1 & \text{if } \left[ (x_k)^2 + (y_k)^2 \right] < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
	$\frac{\sum_{k=1}^N zzz_k}{N} = 0.25$
	$\frac{\sum_{k=1}^N zzz_k}{N}$

Расчет вероятностей для парадокса Бертрана в каждом из трех вариантов

---

## 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

---

**В** этой главе последовательно рассматриваются основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, а также системы линейных и нелинейных уравнений первого порядка. MathCad позволяет решать задачу Коши численно методами Эйлера и Рунге-Кутты. Рассмотрены алгоритмы, заложенные во встроенных функциях, позволяющих решать дифференциальные уравнения численно, приведены примеры подпрограмм со встроенными алгоритмами Эйлера и Рунге-Кутты.

### 7.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

---

Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и производную первого порядка от этой функции  $y'$ :  $F(x, y, y') = 0$ . Решить дифференциальное уравнение, то есть найти общее решение, значит найти искомую функцию  $y$ , превращающую дифференциальное уравнение в верное тождество, установить ее вид. Если общее решение задается в неявном виде, то оно называется общим интегралом.

**Задача Коши.** Если дифференциальное уравнение первого порядка  $y' = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$  имеет в области  $G$  решение, то таких решений бесконечно много, они могут быть заданы в виде  $y = y(x, C)$ , где  $C$  —

произвольная константа. Однако если необходимо найти решение, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , то при определенных условиях такая задача имеет единственное решение. Задача об отыскании решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши. Начальные условия для обыкновенных дифференциальных уравнений называют условиями Коши.

В курсе рассматривается пять основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

1. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.
2. Однородное.
3. Линейное.
4. Уравнение Бернулли.
5. Уравнения в полных дифференциалах.

#### 7.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Самый простой тип уравнений — уравнения с разделяющимися переменными, к такому типу уравнений сводятся все остальные уравнения. Основная идея метода — разделить переменные, взять интегралы от правой и левой частей уравнения, выразить функцию  $y$ . Решение дифференциальных уравнений при правильно выбранном алгоритме всегда сводится к взятию неопределенных интегралов. Если  $y$  выразить явно невозможно — необходимо записать общий интеграл уравнения:

$$y' = \varphi(x, y), \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, P(x, y)dx - Q(x, y)dy = 0, X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_2(y) = 0,$$

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y(y)}dy = 0, P(x)dx + Q(y)dy = 0, P(x)dx =$$

$$= -Q(y)dy, \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

Решим уравнение  $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$ .

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = -\int \frac{xdx}{1 + x^2}, \arctgy = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}, \arctgy =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C, C = \arctgy + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2),$$

$$\arctgy = \ln C - \ln \sqrt{1 + x^2} = \ln \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}}, y = \operatorname{tg} \ln \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}}.$$



В MathCad можно находить только частные решения, т. е. решать задачу Коши. Поэтому решим задачу Коши для уравнения  $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$  с начальными условиями  $y = 1, x = 0$ . Тогда

$$C = e^{\frac{\pi}{4}} \text{ и } y = \operatorname{tg} \ln \frac{\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка в MathCad, необходимо:

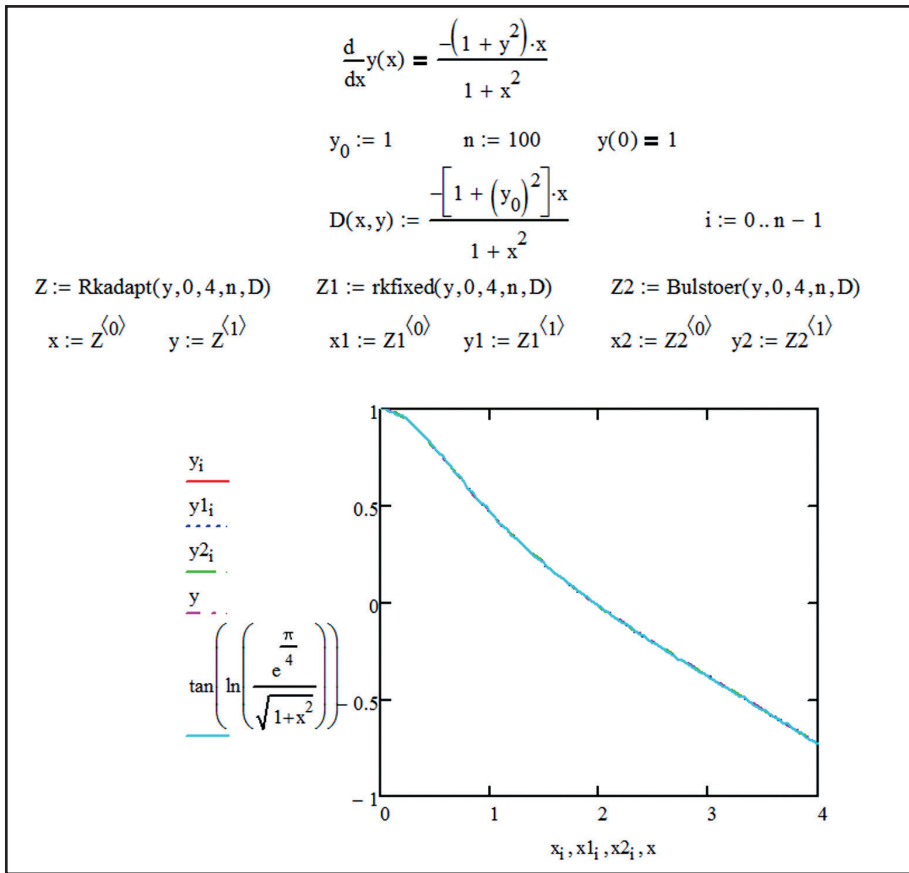
- задать уравнение, которое необходимо решить;
- задать одно начальное условие и число шагов;
- ввести функцию двух переменных  $D(x, y)$ , содержащую вектор первой производной от неизвестной функции;
- вызвать функцию *rkfixed*, *Rkadapt*, *Bulstoer*, возвращающую координаты  $x, y$  функции, являющейся решением дифференциального уравнения.

*Rkfixed* ( $y, x1, x2, \text{intvls}, D$ ) возвращает матрицу значений решений дифференциального уравнения, заданного производными в  $D$  и начальными условиями  $y$  на интервале  $[x1, x2]$ , с использованием метода Рунге — Кутты с постоянным шагом. Параметр *intvls* задает число строк матрицы результатов.

*Rkadapt* ( $y, x1, x2, \text{intvls}, D$ ) возвращает матрицу значений решения дифференциального уравнения, заданного производными в  $D$  и начальными условиями  $y$  на интервале  $[x1, x2]$ , с использованием метода Рунге — Кутты с переменным шагом. Параметр *intvls* задает число строк матрицы результатов.

*Bulstoer* ( $y, x1, x2, \text{intvls}, D$ ) возвращает матрицу значений решений гладкого дифференциального уравнения, заданного производными в  $D$  с начальными условиями  $y$  на интервале  $[x1, x2]$  и методом Булирша — Штера. Параметр *intvls* задает число строк матрицы результатов.

Теперь решим задачу Коши для уравнения  $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$  с начальными условиями  $y = 1, x = 0$  в Mathcad, и вышеупомянутым алгоритмом. Используем для этого три встроенных функции для решения дифференциального уравнения первого порядка и сравним полученные результаты.



Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

Как видно из решения, полученные аналитически и при помощи встроенных функций *Rkfixed*, *Rkadapt*, *Bulstoer*, накладываются друг на друга, что означает: аналитическое решение и численное — идентичны.

#### 7.1.1.1. Метод Рунге-Кутты

Теперь разберемся в алгоритме, заложенном во встроенных функциях *Rkadapt*, *rkfixed*.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка  $y' = f(x, y)$ ,  $x \in [a, b]$   $y(a) = y_0$ , причем  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$  для всех  $x \in [a, b]$ , и задача Коши имеет единственное решение. Применяемые для численного решения

методы носят название дискретных, с их помощью вычисляется последовательность приближений  $y_n \approx y(x_n)$  к искомой функции, где  $y(x_n)$  — точное значение функции на множествах точек сетки  $x_{n+1} = x_n + h, n = 0, 1, \dots, N-1, x_0 = a, x_N = b, h > 0$ .

Метод основан на замене  $\varphi(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha, y + bh) f(x, y)$ . Поскольку  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ , то  $\varphi(x, y, h) \approx (c_1 + c_2) f(x, y) + hc_2 (af'_x(x, y) + bf'_y(x, y) f(x, y))$ .

$$\Delta(x, y, h) \approx f(x, y) + \frac{h}{2} (f'_x(x, y) + f'_y(x, y) f(x, y)).$$

Тогда можно записать уравнения для вычисления констант

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_2 a = \frac{1}{2}, \\ c_2 b = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - \alpha, \\ c_2 = \alpha, \\ a = \frac{1}{2\alpha}, \\ b = \frac{1}{2\alpha}. \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{2}:$$

$$: y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n)) \right),$$

Наиболее известной является формула четырехэтапного метода:

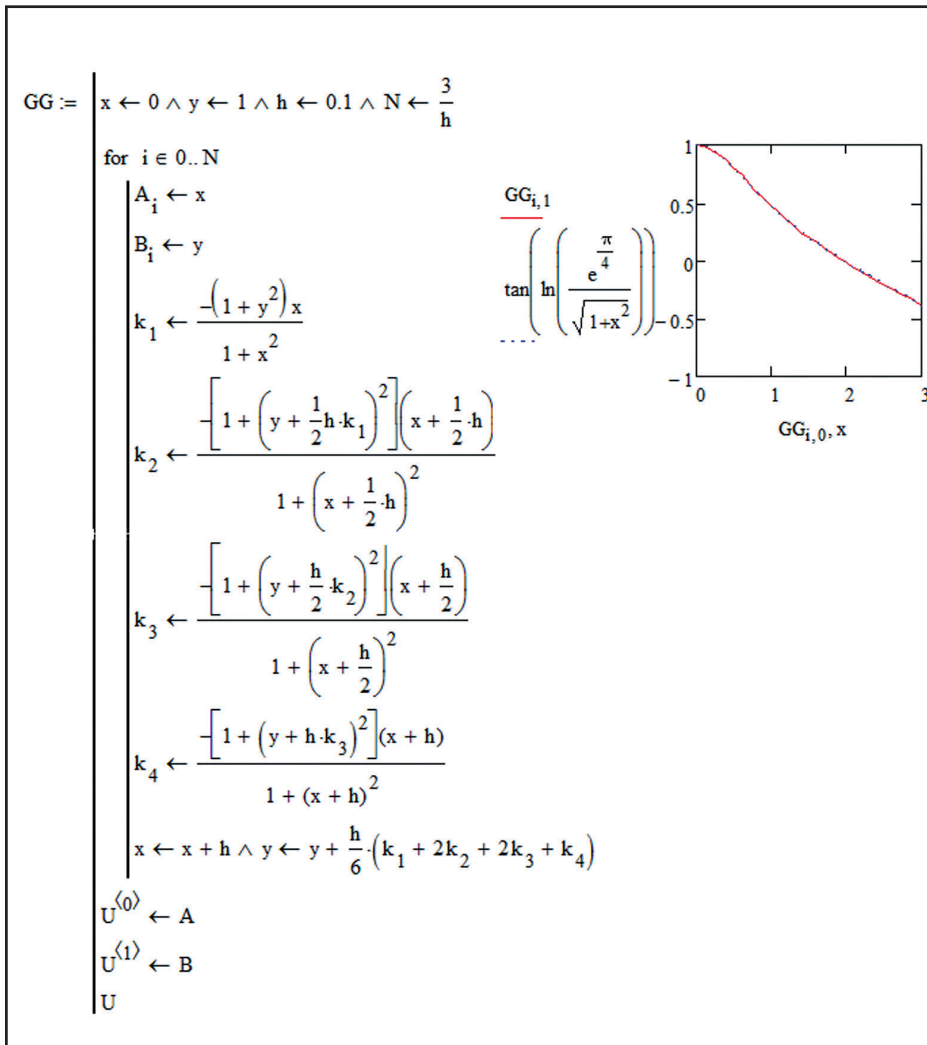
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Решим ту же задачу Коши методом Рунге-Кутты (с. 110). Для реализации этого метода используем программирование. Напишем подпрограмму *GG*. При помощи логических переменных в первой строке записаны начальные условия, шаг  $h$  и число шагов  $N$ . Вычисления производятся в цикле «*for*». Задаются массивы  $A_i, B_i$ , которые будут заполняться числами на каждом шаге вычислений. Массиву  $A$  будут присвоены числа, отвечающие за абсциссы точек функции, массиву  $B$

будут присваиваться числа, отвечающие за ординаты. Согласно четырехэтапному методу последовательно вычисляются значения  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , через них находятся  $x, y$ , которые вновь присваиваются последующим элементам массивов  $A, B$ . После  $N$  шагов строится график искомой функции, являющейся решением дифференциального уравнения  $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$  с начальными условиями  $y = 1, x = 0$ . Аналитическое решение и решение, полученное методом Рунге-Кутты, совпадают, как показано:



Метод Рунге-Кутты

Rkadapt, rkfixed — это функции, которые используют встроенный алгоритм Рунге-Кутты.

### 7.1.2. Однородные дифференциальные уравнения

Функция называется однородной, если выполняется следующее равенство  $F(kx, ky) = k^n F(x, y)$ .

#### 7.1.2.1. Однородное дифференциальное уравнение

Дифференциальное уравнение называется однородным, если его можно привести к виду  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , очевидной является замена  $\frac{y}{x} = u$ ,

после которой уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными:  $y' = f(x, y), \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right), u = \frac{y}{x}, y = u \cdot x, \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$ ,

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u), \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Решим уравнение  $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$ . Очевидно, что  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ .

$$y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}, \frac{y}{x} = u, y = u \cdot x, \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u, \frac{du}{dx}x + u = u + \cos u, \frac{du}{dx}x = \cos u, \frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{dx}{x}, \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln |x| + \ln |C|, \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = Cx, u = 2 \operatorname{arctg} Cx - \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$y = x \left( 2 \operatorname{arctg} Cx - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right).$$

В результате деления на  $\cos u$  потеряны решения  $y = x \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$  при  $k = 2n$ . Поэтому ответ запишется в виде

$$k = 2n - 1: \quad y = x \left( 2 \operatorname{arctg} Cx + \frac{\pi}{2} + \pi(2n - 1) \right),$$

$$k = 2n: \quad y = x \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right).$$

### 7.1.2.2. Обобщенное однородное уравнение

Дифференциальные уравнения вида  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$  при  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

сводятся к однородным после замен  $x = u + m, y = v + n$  и называются обобщенными однородными.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1m + b_1n + c_1}{a_2u + b_2v + a_2m + b_2n + c_2}\right) = \left[ \begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0. \end{cases} \right] = \\ &= f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\left(\frac{v}{u}\right)}{a_2 + b_2\left(\frac{v}{u}\right)}\right) = \rho\left(\frac{v}{u}\right). \end{aligned}$$

При  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$   $a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$  и уравнение  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

принимает вид  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \rho(a_1x + b_1y)$ .

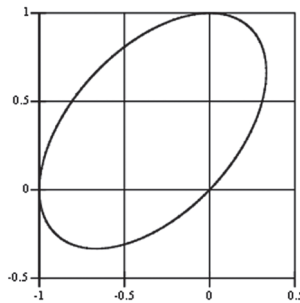
Решим обобщенное однородное дифференциальное уравнение  $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$  при начальных условиях  $y(0) = 0$ . Немного забегаая вперед, отметим, что визуально уравнение похоже на уравнение в полных дифференциалах, и, действительно,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$  — таким и является. Однако не обязательно обобщен-

ное однородное уравнение одновременно уравнение в полных дифференциалах. И здесь мы будем решать это уравнение только как обобщенное однородное.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{(2x - y + 1)}{(2y - x - 1)} = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1} = \left[ \begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n \end{cases} \right] = \\ &= \frac{2(u + m) - (v + n) + 1}{(u + m) - 2(v + n) + 1} = \frac{2u - v + (2m - n + 1)}{u - 2v + (m - 2n + 1)} = \\ &= \left[ \begin{cases} 2m - n + 1 = 0, \\ m - 2n + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{3}, \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases} \right] = \frac{2u - v}{u - 2v} = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - \frac{v}{u}} = \frac{dv}{du}, \frac{v}{u} = \\ &= t, v' = t'u + t, t'u + t = \frac{2 - t}{1 - t}, \frac{dt}{du} u = \frac{2 - t}{1 - t} - t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dt(1-2t)}{2(t^2-t+1)} &= \int \frac{du}{u}, -\frac{1}{2} \int \frac{dt(t^2-t+1)}{(t^2-t+1)} = \int \frac{du}{u}, -\frac{1}{2} \ln|t^2-t+1| = \\
 &= \ln|u| + \ln|c|, -\frac{1}{2} \ln|t^2-t+1| = \ln|cu|, \\
 \ln \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}} &= \ln|cu|, \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}} = cu, \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(\frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right) + 1}} = \\
 &= c \left(x + \frac{1}{3}\right), y^2 - xy + x^2 + x - y = c = 0.
 \end{aligned}$$

Интегральная кривая представляет собой кривую второго порядка — эллипс в системе координат, повернутой на  $45^\circ$  по часовой стрелке от оси  $OX$ .



Интегральная кривая для задачи Коши  
 $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0, y(0) = 0$

### 7.1.3. Линейное уравнение

Линейным ДУ первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции  $y$  и ее производной  $y'$ . Данное уравнение можно решать двумя способами: методом вариации постоянной и методом неопределенных коэффициентов. В качестве численного метода для решения нами будет рассмотрен метод Эйлера. Однако не стоит думать, что этим методом можно решать только линейные дифференциальные уравнения.

#### 7.1.3.1. Метод неопределенных коэффициентов

$y' + P(x)y = Q(x)$ , где  $P(x), Q(x)$  — непрерывные функции. Будем искать решение в виде произведения двух функций  $y = u(x) \cdot v(x)$ , где  $v(x)$  — произвольная функция.

$$y = u \cdot v, y' = uv' + u'v, \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Puv = Q, u \left( \frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q,$$

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \frac{dv}{v} = -Pdx, \ln|v| = -\int Pdx + \ln c_1, \ln \left( \frac{v}{c_1} \right) =$$

$$= -\int Pdx, v = c_1 \exp \left( -\int Pdx \right), c_1 = 1, v = \exp \left( -\int Pdx \right).$$

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x), \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}, u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Общее решение имеет вид  $y = v(x) \left[ \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]$ .

**Пример.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, x \neq -1$  при начальном условии  $y(0) = \frac{3}{2}$ .

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, x \neq -1, y = vu, \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}vu = (x+1)^3,$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0, \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}, \ln|v| = 2\ln|x+1|, v = (x+1)^2, (x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3,$$

$$\frac{du}{dx} = (x+1), u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Общее решение  $y = u \cdot v = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$ . Начальному условию удов-

летворяет  $C = 1$ . Частное решение  $y = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$ .

### 7.1.3.2. Метод вариации постоянной

Будем искать решения уравнения  $y' = P(x)y + Q(x)$  в виде  $y = C(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)$ , которое является решением  $y' = P(x)y$

$y = C \exp\left(\int P(x)dx\right)$  при замене константы  $C$  на функцию  $C(x)$ .

$$C'(x)\exp\left(\int P(x)dx\right) + C(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)P(x) =$$

$$= C(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)P(x) + Q(x), C'(x) = Q(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right),$$

$$C(x) = \int Q(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)dx + C.$$

Общее решение уравнения:



$$y = \exp\left(\int P(x)dx\right)\left(\int Q(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)dx + C\right).$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, x \neq -1,$$

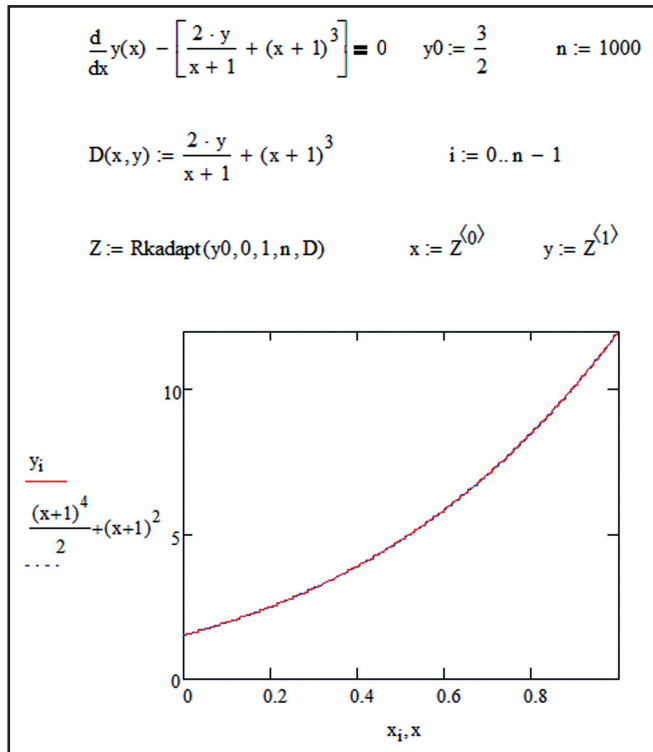
$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0, \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x+1}, \int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x+1}, \frac{1}{2}\ln|y| =$$

$$= \ln|C(x+1)|, \sqrt{y} = C(x+1), y = C(x+1)^2,$$

$$y = C(x)(x+1)^2, C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - 2C(x)(x+1) = \\ = (x+1)^3, C'(x) = (x+1),$$

$$\frac{dC}{dx} = (x+1), dC = (x+1)dx, C(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + C, y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Решив это уравнение при помощи встроенной функции *Rkadapt*, получаем полное согласие с аналитическим решением:



Аналитическое и численное решение линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, x \neq -1, \text{ при начальном условии } y(0) = \frac{3}{2}$$

### 7.1.3.3. Метод Эйлера

Самый простой численный метод решения дифференциального уравнения основан на аппроксимации функции в точке касательной, проходящей через эту точку. Рассмотрим  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ . Если представить функцию как прямую, касательную в точке  $y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$ , то

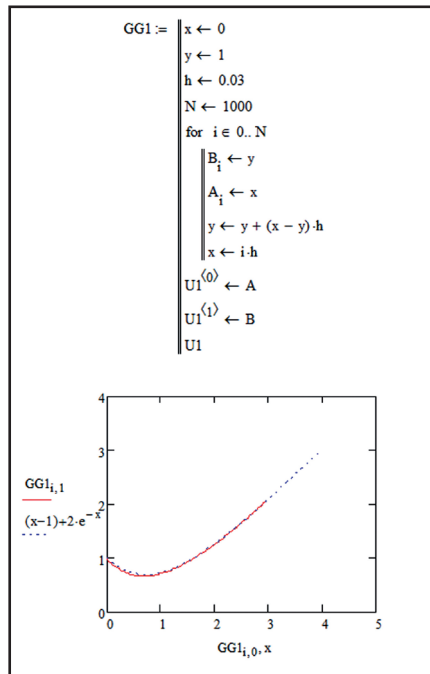
$$y(x + \Delta x) = y(x_1) = y_0 + y'(x_0)\Delta x = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x, \quad y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x.$$

Решим методом Эйлера уравнение  $y' + y = x$  при условии  $y(0) = 1$ . Оно является линейным, аналитическое решение находится как  $y' + y = 0, \frac{dy}{y} = -dx, \ln y = -x + C, y = C \exp(-x), y' + y = x, y = C(x) \exp(-x),$

$$C'(x) = x \exp(x), C(x) = x \exp(x) - \exp(x) + C,$$

$$y = (x \exp(x) - \exp(x) + C) \exp(-x) = x - 1 + C \exp(-x), C = 2, y = x - 1 + 2 \exp(-x).$$

В подпрограмме возьмем шаг  $h = 0,03$ , число шагов  $N = 1000$ , результаты для значений аргумента и соответствующих значений функций выведем в векторном виде, построим график полученного решения. Видно, что результаты численного решения накладываются на кривую, описывающую точное аналитическое решение  $y = x - 1 + 2e^{-x}$ .



Применение алгоритма метода Эйлера к решению  $y' + y = x$  при условии  $y(0) = 1$

В MathCad нет встроенных функций, использующих данный алгоритм, из-за достаточно высокой погрешности.

#### 7.1.4. Уравнение Бернулли

$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$ , где  $P(x), Q(x)$  — непрерывные функции или произвольные постоянные. При  $n = 0$  — линейное дифференциальное уравнение, при  $n = 1$  — уравнение с разделяющимися переменными. Заменой  $z = y^{-n+1}$  уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению.

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q, z = y^{-n+1},$$

тогда  $\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$ . Однако прямая замена  $y = u(x)v(x)$  также позволяет решить уравнение.

Решим уравнение  $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$  при начальных условиях  $y(0) = 1$ .

$$\frac{1}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y^2} = x^3, z = y^{-n+1} = y^{-2}, \frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3,$$

$$z = uv, \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - 2xuv = -2x^3, u \left( \frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3,$$

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \frac{dv}{v} = 2xdx, \ln|u| = x^2,$$

$$v = \exp(x^2), e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3, du = -2\exp(-x^2)x^3 dx,$$

$$u = -2 \int \exp(-x^2)x^3 dx = x^2 \exp(-x^2) + \exp(-x^2) + C,$$

$$z = uv = x^2 + 1 + c \exp(x^2), y^{-2} = x^2 + 1 + c \exp(x^2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + c \exp(x^2)}}, x = 0, y = 1, C = 0, y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Решив это уравнение при помощи встроенной функции *Rkadapt*, получаем полное согласие с аналитическим решением.

```

d
dx y(x) = x^3 * y^3 - x * y

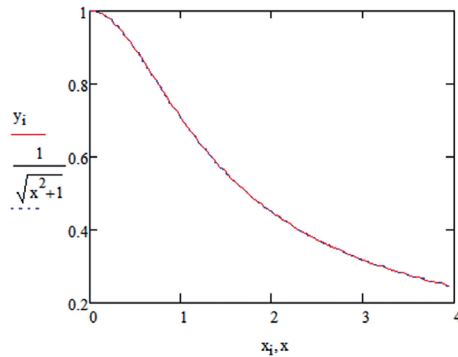
y_0 := 1      n := 100

D(x,y) := x^3 * y^3 - x * y      i := 0..n - 1

Z := Rkadapt(y, 0, 4, n, D)

x := Z<0>      y := Z<1>

```



Численное и аналитическое решение задачи Коши уравнения Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3 \text{ при начальных условиях } y(0) = 1$$

#### 7.1.5. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  имеет такое название, поскольку решением этого уравнения является функция, полный дифференциал которой известен и равен  $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$ , где  $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ . Очевидной проверкой на вид уравнения является выполнение одновременно двух условий  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Тогда

$dF = 0, F = C$ . Задача сводится к нахождению функции  $F(x, y)$  по известному полному дифференциалу  $dF(x, y)$  этой функции  $F(x, y)$ .

Решим уравнение  $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$  при начальных условиях  $y(0) = -1$

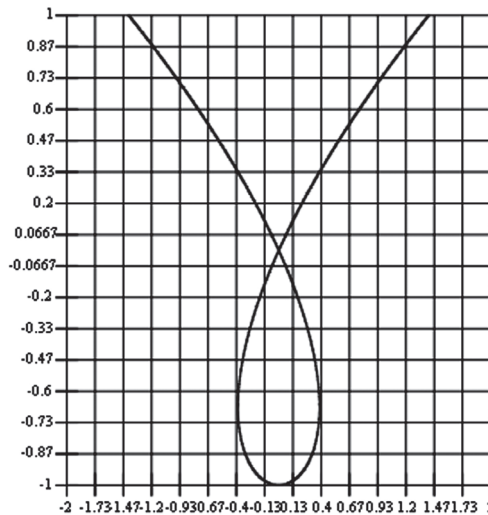
$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0, P = \frac{2x}{y^3}, Q = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4},$$

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = du, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}. \end{cases} u(x, y) = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y), \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y), \varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \varphi(y) = -\frac{1}{y} + c,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c, \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c, \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = 1.$$

Решение задачи Коши дает уравнение кривой, заданной в неявном виде, строим ее при помощи MathCad. Как видно, это самопересекающаяся кривая, точка самопересечения (0,0):



Интегральная кривая для уравнения  $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

при начальных условиях  $y(0) = -1$

## 7.2. Однородные и неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Однородное дифференциальное уравнение имеет вид  $y'' + ay' + by = 0$ . Каждому уравнению соответствует характеристическое  $k^2 + ak + b = 0$ . В зависимости от значения его корней общее решение однородного дифференциального уравнения будет иметь особенный вид (табл. 5).

Таблица 5

**Вид общего решения однородного дифференциального уравнения  
 $y'' + ay' + by = 0$  второго порядка в зависимости  
от корней характеристического уравнения**

Характеристическое уравнение	Корни характеристического уравнения	Общее решение дифференциального уравнения
$k^2 + ak + b = 0$	$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$	$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k^2 + ak + b = 0$	$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$	$\bar{y} = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$
$k^2 + ak + b = 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$	$\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$
$k^2 + ak + b = 0$	$k_{1,2} = \pm \beta i \in \mathbb{C}$	$\bar{y} = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$

Неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид  $y'' + ay' + by = f(x)$ . Неоднородные уравнения аналитически решаются двумя способами. Методом неопределенных коэффициентов и методом вариации произвольной постоянной. С последним методом мы знакомы из 7.1.3 (Линейные уравнения). Первый способ требует знания табличных данных (табл. 6), второй — только знания алгоритма. Однако часто бывает, что второй метод приводит к сложным интегралам, взятие которых требует значительных затрат, в то время как первый — только решения систем линейных уравнений. Только в случае отсутствия функции  $f(x)$  в таблице рекомендуется использовать метод вариации постоянной.

Таблица 6

**Вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения  $y'' + ay' + by = f(x)$  второго порядка в зависимости от вида  $f(x)$**

$f(x)$	Корни характеристического уравнения	Частное решение дифференциального уравнения
$P_n(x)$	0 — не корень 0 — корень кратности $r$	$\tilde{y} = Q_n(x)$ $\tilde{y} = x^r Q_n(x)$
$\exp(\alpha x) P_n(x)$	$\alpha$ — не корень $\alpha$ — корень кратности $r$	$\tilde{y} = \exp(\alpha x) Q_n(x)$ $\tilde{y} = x^r \exp(\alpha x) Q_n(x)$
$C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$	$i\beta$ — не корень $i\beta$ — корень	$\tilde{y} = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$ $\tilde{y} = x(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$
$P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x$	$i\beta$ — не корень $i\beta$ — корень	$\tilde{y} = N_k(x) C_1 \cos \beta x + M_k(x) C_2 \sin \beta x$ $\tilde{y} = x(N_k(x) C_1 \cos \beta x + M_k(x) C_2 \sin \beta x)$ $k = \max(n, m)$

Решим однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами  $y'' - 5y' + 6y = 0$  при начальных условиях  $y(0) = 0, y'(0) = 2e^2 - 3e^3$ .

Решениями характеристического уравнения будут два различных действительных числа:  $k^2 - 5k + 6 = 0, k_{1,2} = 2, 3$ . Тогда общее решение  $\bar{y} = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(3x)$ , учитывая начальные условия, имеет вид  $\bar{y} = \exp(2x) - \exp(3x)$ .

Решим неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами  $y'' - 5y' + 6y = 10 \sin x$  при начальных условиях  $y(0) = 0, y'(0) = 0$  методом неопределенных коэффициентов.

Частное решение будем искать в виде  $\tilde{y} = A \sin x + B \cos x$ , тогда  $\tilde{y}' = A \cos x - B \sin x, \tilde{y}'' = -A \sin x - B \cos x$ .

$$-A \sin x - B \cos x - 5A \cos x + 5B \sin x + 6A \sin x + 6B \cos x = 10 \sin x$$

$$\begin{cases} 5A + 5B = 10, \\ -5A + 5B = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Частное решение  $\tilde{y} = \sin x + \cos x$  и общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде  $\bar{y} + \tilde{y} = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(3x) + \sin x + \cos x$ . С учетом начальных условий  $\tilde{y} = \exp(3x) - 2\exp(2x) + \sin x + \cos x$ .

Решим это же неоднородное уравнение методом вариации произвольной постоянной. Поскольку  $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ , то будем искать решение в виде  $\bar{y} = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}$ , составим систему для нахождения функций  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ :

$$\begin{cases} C_1'(x)\exp(2x) + C_2'(x)\exp(3x) = 0, \\ C_1'(x)2\exp(2x) + C_2'(x)3\exp(3x) = 10\sin x. \end{cases}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\exp(x), \quad C_2'(x) = 10\sin x \cdot \exp(-3x),$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\exp(x) = -10\sin x \cdot \exp(-2x).$$

$$\int dC_2(x) = 10 \int \sin x \cdot \exp(-3x) dx = -\exp(-3x)(\cos x + 3\sin x) + C_2,$$

$$\int dC_1(x) = -10 \int \sin x \cdot \exp(-2x) dx = 2\exp(-2x)(\cos x + 2\sin x) + C_1.$$

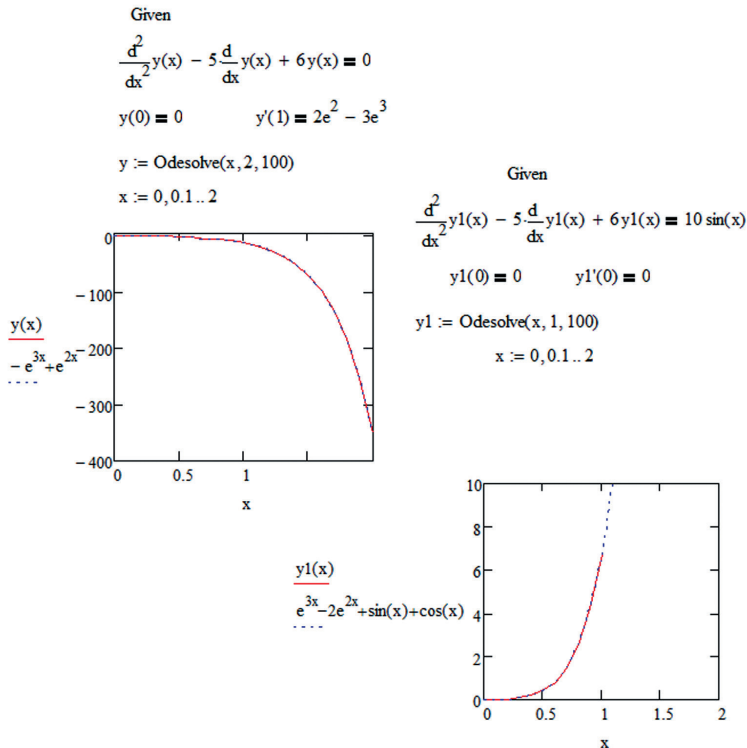
$$\begin{aligned} \bar{y} &= (2\exp(-2x)(\cos x + 2\sin x) + C_1)\exp(2x) + \\ &+ (-\exp(-3x)(\cos x + 3\sin x) + C_2)\exp(3x) = \\ &= 2\cos x + 4\sin x + C_1 \exp(2x) - \cos x - 3\sin x + C_2 \exp(3x) = \\ &= C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(3x) + \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Отметим, что метод вариации произвольной постоянной более трудоемок (по сравнению с методом неопределенных коэффициентов), однако позволяет решить неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами при минимуме теоретических знаний, а именно без привлечения дополнительной информации о том в каком виде искать частное решение.

Для того чтобы решить дифференциальные уравнения высших порядков (в частности, однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами) в MathCad:



- после ключевого слова *Given* задать уравнение, которое необходимо решить;
- задать начальные условия;
- вызвать функцию *Odesolve* (*[vf]*, *x*, *b*, *[intvls]*), которая возвращает матрицу для создания графика Фронт Парето, где *b*-правая граница интервала, *intvls* — шаг;
- построить график решения дифференциального уравнения.



Численное и аналитическое решение однородного  
и неоднородного уравнений

---

## Заключение

---

Изначально данное пособие задумывалось как краткое и освещающее неполный список самых важных тем, которые изучают первокурсники нематематических специальностей в курсе математики, а именно дифференцирование и интегрирование. Однако в процессе работы над пособием возникла необходимость рассмотреть и другие разделы. Например, отдельная глава посвящена решению основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритмы численного интегрирования тоже не могли отстать без внимания, поскольку знание алгоритмов облегчает их понимание и запоминание. Надеюсь, что пособие стимулирует студентов, а также всех интересующихся вопросами инженерных расчетов в любой инженерной дисциплине использовать систему MathCad. Кроме того, упростит и систематизирует уже имеющиеся накопленные знания и откроет дверь в изучение новых разделов математики.

Возможно, читатель самостоятельно освоит работу в таких современных вычислительных системах компьютерной алгебры, как Mathematica, MathLab, Maple и др., в которых есть свои преимущества и недостатки по сравнению с MathCad. Но это будет уже другая история.

---

## Список литературы

---

1. Ильин В. А. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. 7-е изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. Ч. I. 648 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. Москва : Физматлит, 1969. Т. 2.
3. Хинчин А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 112 с.
4. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике / С. М. Ермаков. Санкт-Петербург, 2009. 192 с.
5. Жуков А. В. Вездесущее число пи / А. В. Жуков. Москва : Изд-во ЛКИ, 2007. 216 с.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. Москва : Наука, 1978. 512 с.
7. Кузнецов Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. Москва : Высшая школа, 1962. 249 с.
8. Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Москва : Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. Москва : Изд-во ЛКИ, 2016. 512 с.
10. Сборник задач по математике / А. В. Ефимов [и др.]. Москва : Физматлит, 2001. Ч. 1; 2002. Ч. 2.
11. Кендалл М. Геометрические вероятности / М. Кендалл, П. Моран. Москва : Наука, 1972. 192 с.

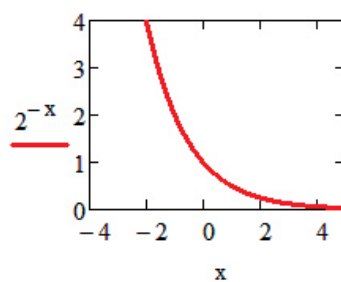
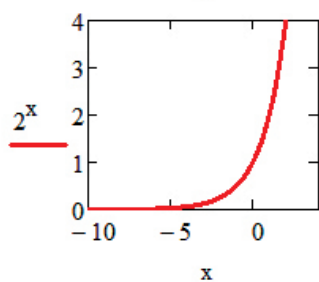
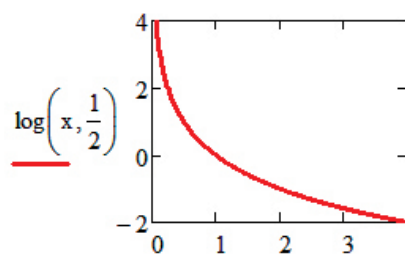
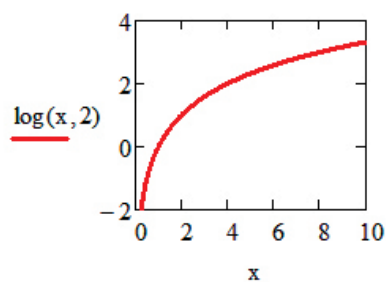
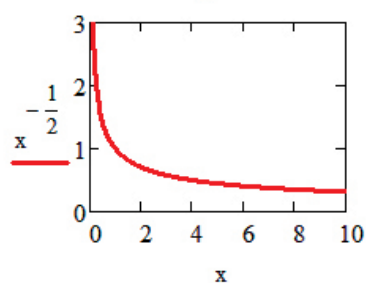
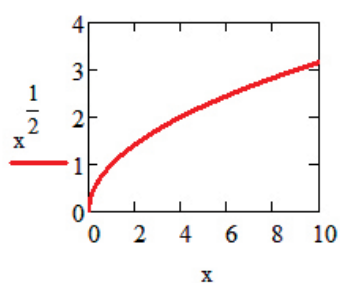
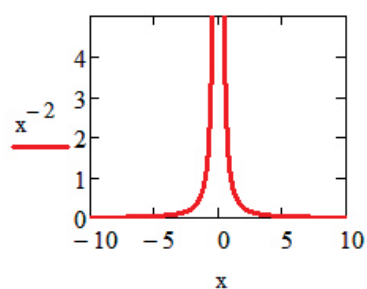
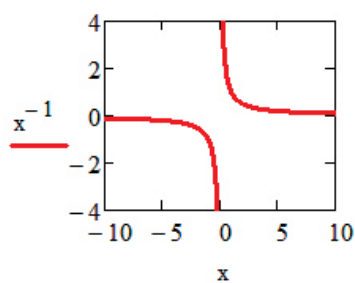
---

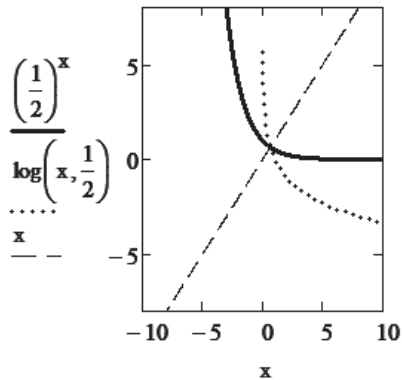
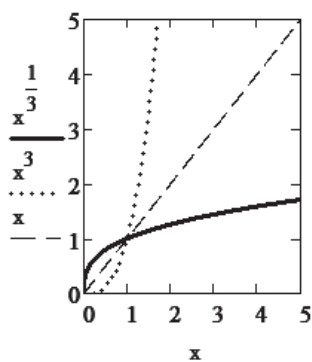
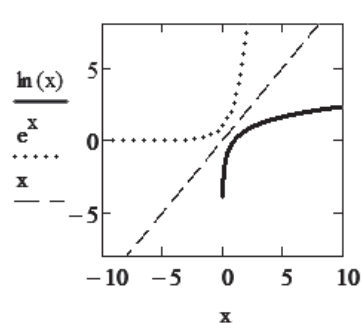
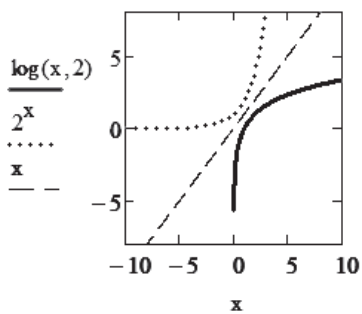
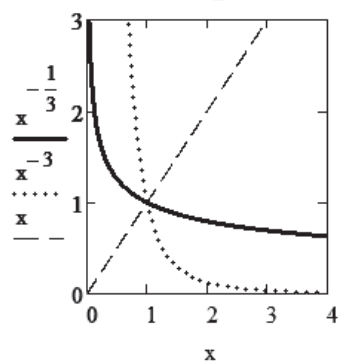
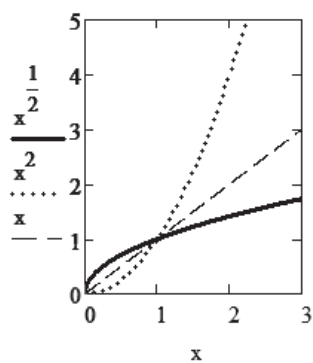
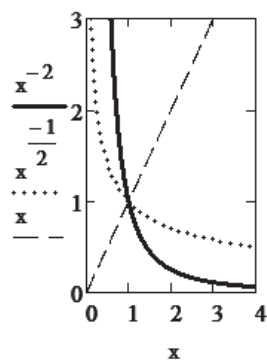
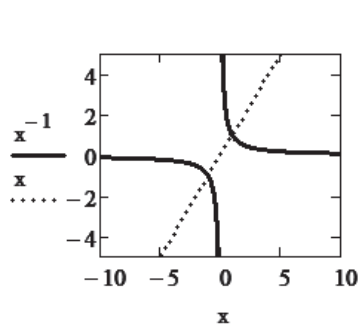
## Приложение 1

---

### Графики основных элементарных функций и обратных к ним

---





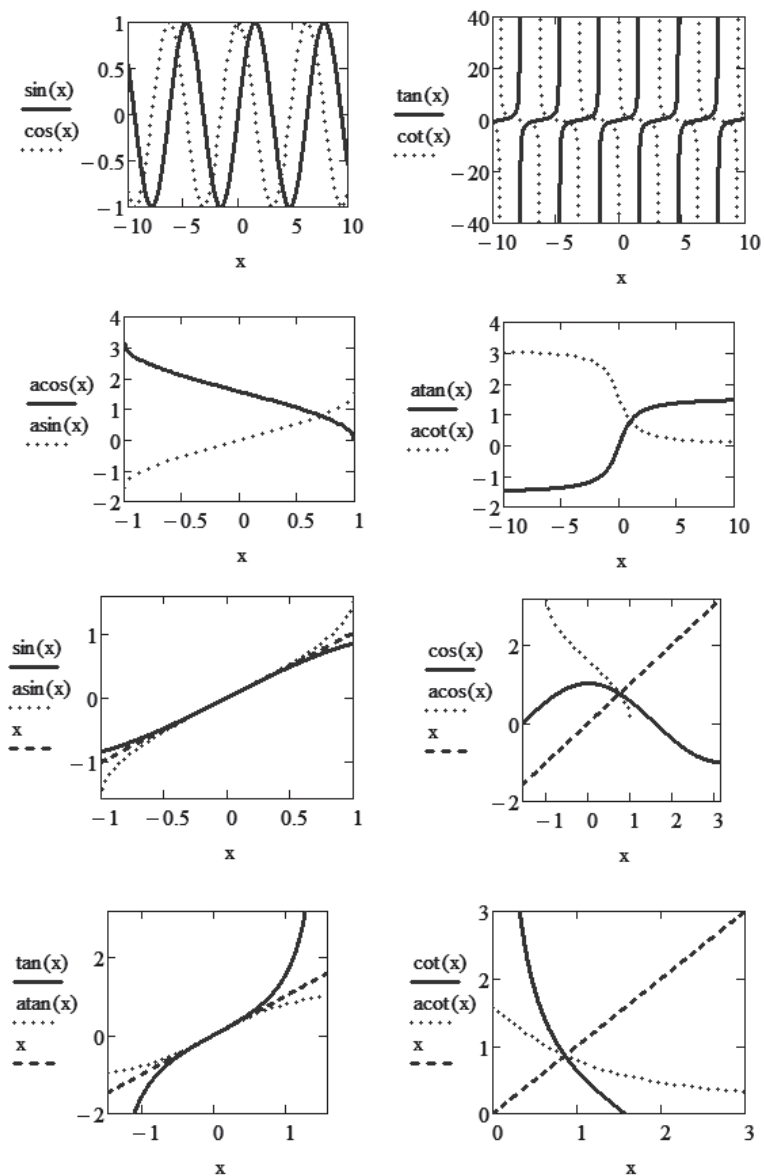
---

## Приложение 2

---

### Графики основных тригонометрических функций и обратных к ним

---



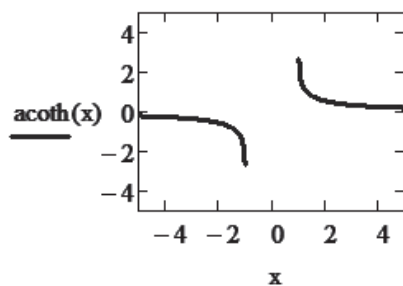
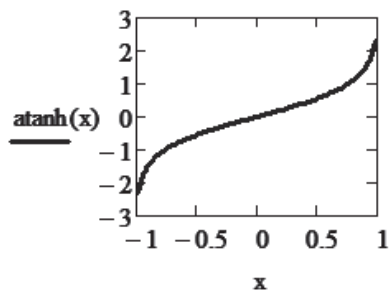
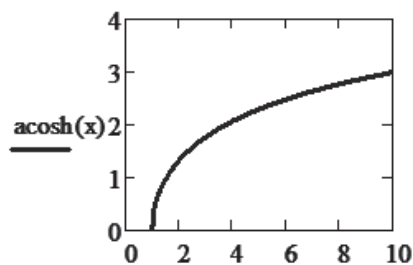
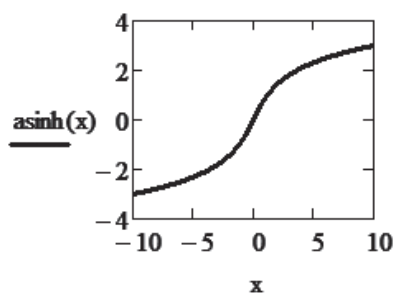
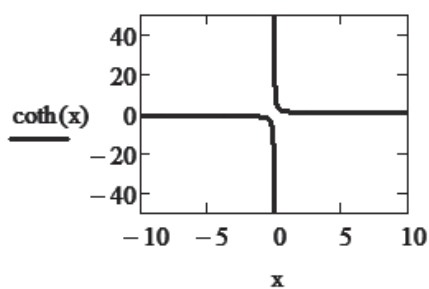
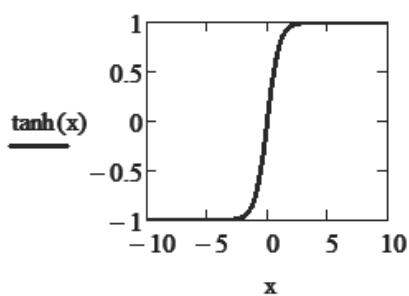
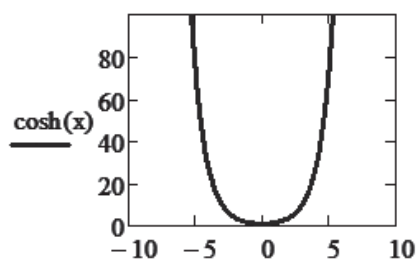
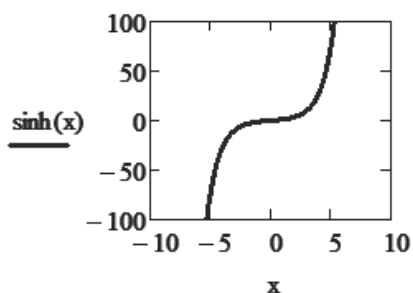
---

## Приложение 3

---

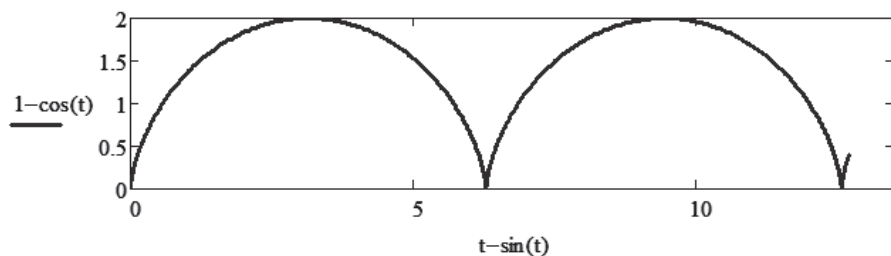
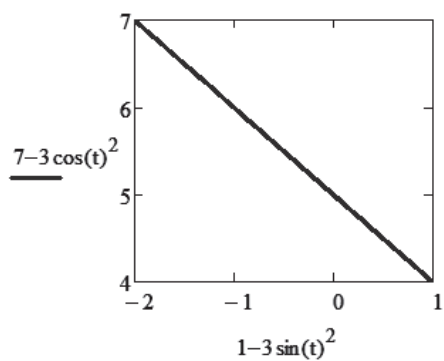
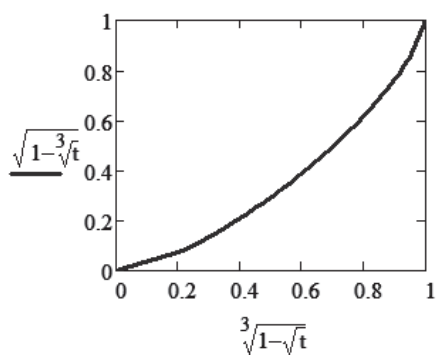
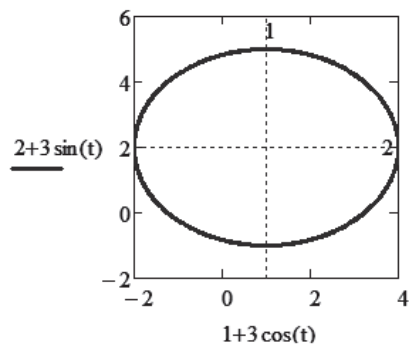
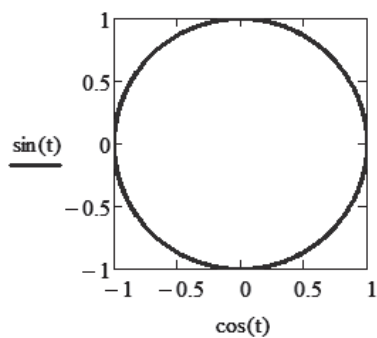
### Графики гиперболических функций и обратных к ним

---



## Приложение 4

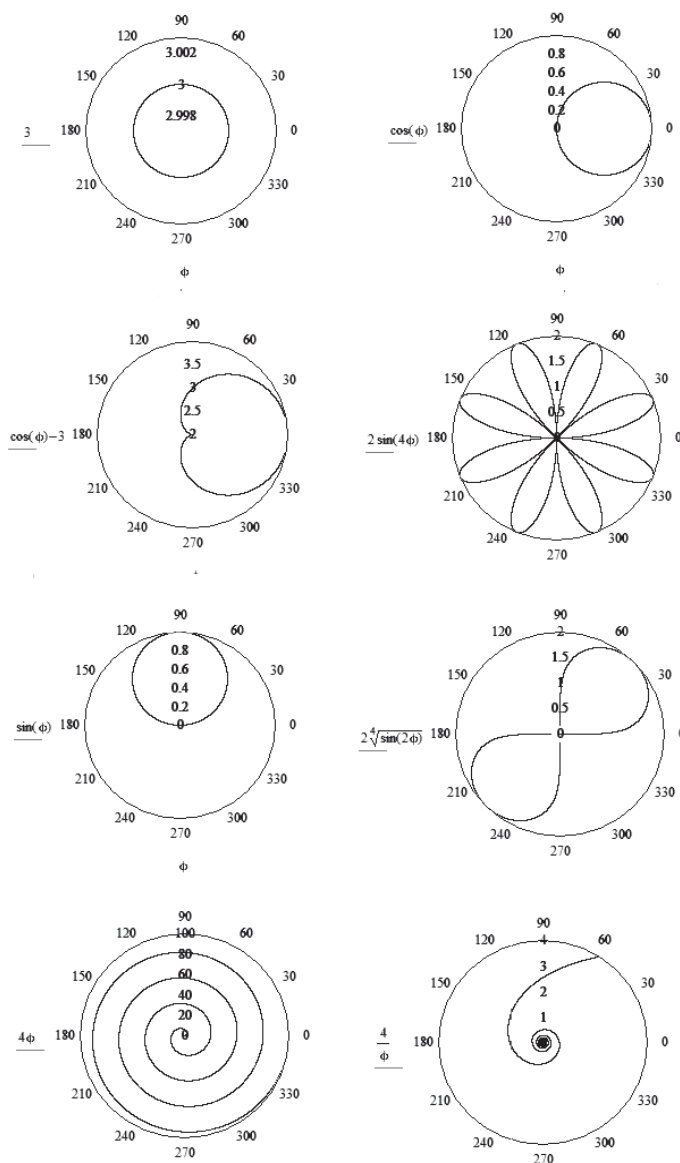
### Графики некоторых кривых, заданных параметрически





## Приложение 5

### Графики некоторых кривых, заданных в полярной системе координат



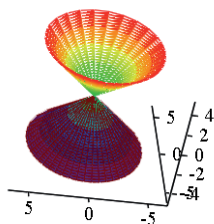
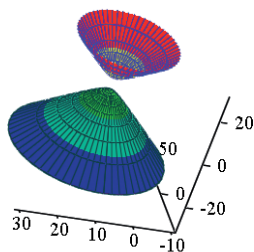
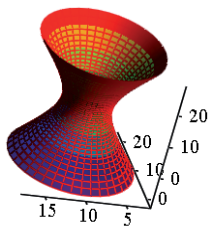
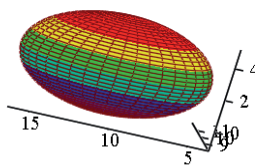
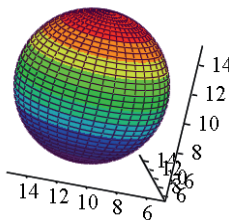
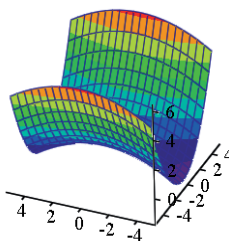
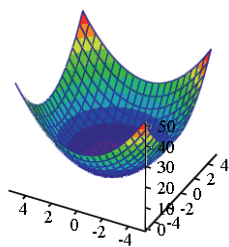
---

## Приложение 6

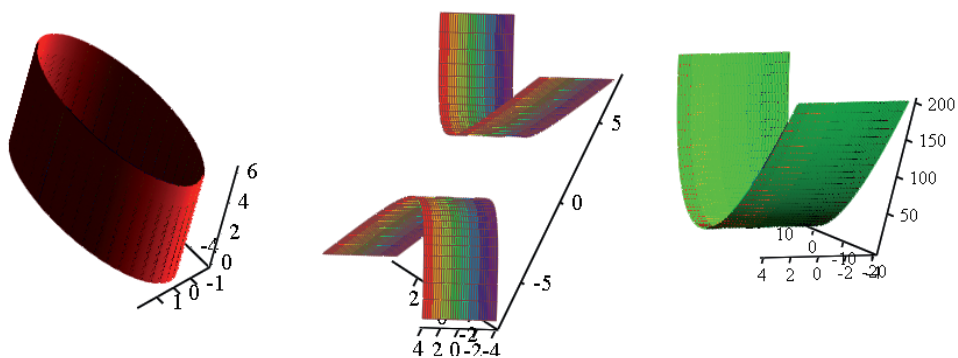
---

### Поверхности второго порядка

---



Поверхности второго порядка: параболоид эллиптический, гиперболический, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус



Цилиндры: эллиптический, гиперболический, параболический

---

## Оглавление

---

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ФУНКЦИИ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА .....	5
1.1. Основные элементарные функции, задаваемые явно .....	5
1.2. Функции, задаваемые параметрически .....	8
1.3. Кривые в полярной системе координат .....	9
1.4. Прямолинейные и криволинейные координаты. Преобразования .....	15
1.5. Поверхности второго порядка .....	19
2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....	23
3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....	25
3.1. Числовые последовательности и их пределы .....	25
3.2. Предел функции .....	27
4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ .....	29
4.1. Дифференцирование.....	29
4.1.1. Производные основных элементарных функций .....	30
4.1.2. Таблица производных.....	32
4.1.3. Производная $n$ -го порядка .....	34

4.1.4. Производная $n$ -го порядка от произведения двух функций. Формула Лейбница.....	35
4.1.5. Исследование функций и построение графиков.....	36
4.2. Интегрирование .....	39
4.2.1. Нахождение неопределенных интегралов .....	39
4.2.2. Нахождение определенных интегралов .....	46
4.2.3. «Неберущиеся» в элементарных функциях интегралы ....	47
4.2.4. Несобственные интегралы .....	51
4.2.5. Эллиптические интегралы.....	55
4.2.6. Интегралы, зависящие от параметра .....	58
4.2.7. Взятие интегралов с использованием гамма-функции ....	61
<b>5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ .....</b>	<b>62</b>
5.1. Приближенные методы вычисления определенных интегралов.....	62
5.1.1. Метод прямоугольников.....	63
5.1.2. Метод трапеций .....	64
5.1.3. Метод Симпсона.....	64
5.2. Исследование функций на экстремум.....	67
5.3. Поиск корней полиномов.....	68
5.4. Приближенные методы нахождения корней алгебраических уравнений .....	69
5.4.1. Метод половинного деления .....	69
5.4.2. Метод простых итераций.....	71
5.4.3. Метод касательных .....	74
5.4.4. Метод хорд .....	75
5.4.5. Разбиение на сегменты .....	77
5.5. Приближенные методы при использовании разложения в ряд .....	78
5.6. Алгоритм вычисления числа $e$ .....	79
5.7. Приближенные вычисления с использованием дифференциалов.....	81

5.8. Решение систем линейных уравнений .....	82
5.8.1. Решение определенных систем линейных уравнений .....	82
5.8.2. Решение неопределенных систем линейных уравнений ...	86
5.9. Разложение иррациональностей в цепные дроби .....	88
 6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО .....	92
6.1. Генератор случайных чисел .....	92
6.2. Вычисление площади треугольника в декартовой системе координат .....	94
6.3. Вычисление площади в полярной системе координат .....	95
6.4. Вычисление определенных интегралов .....	98
6.5. Вычисление двойных интегралов .....	98
6.6. Задача Бюффона .....	101
 7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....	105
7.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка .....	105
7.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными .....	106
7.1.2. Однородные дифференциальные уравнения .....	111
7.1.3. Линейное уравнение .....	113
7.1.4. Уравнение Бернулли .....	117
7.1.5. Уравнение в полных дифференциалах .....	118
7.2. Однородные и неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами .....	120
 ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	124
 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	125
 ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Графики основных элементарных функций и обратных к ним .....	126

---

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Графики основных тригонометрических функций и обратных к ним .....	128
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Графики гиперболических функций и обратных к ним .....	129
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Графики некоторых кривых, заданных параметрически .....	130
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Графики некоторых кривых, заданных в полярной системе координат .....	131
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Поверхности второго порядка .....	132

*Учебное издание*

**Власова** Алиса Михайловна

# Математика с MathCad

Редактор *О. С. Смирнова*  
Верстка *Е. В. Ровнушкиной*



Подписано в печать 14.12.2017. Формат 70×100 1/16.  
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 11,3.  
Уч.-изд. л. 6,9. Тираж 50 экз. Заказ 376.

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: [rio@urfu.ru](mailto:rio@urfu.ru)

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13  
Факс: 8 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>

*Для заметок*





### **ВЛАСОВА АЛИСА МИХАЙЛОВНА**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» ИнФО УрФУ, старший научный сотрудник Института физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук.

Область научных интересов – физика прочности и пластичности, пластическая деформация металлов и сплавов.

Автор более 20 статей в реферируемых и рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus, РИНЦ.